

הקדמה

בשיעור זה נחזור אל הכלים שלמדנו בכיתה ח' בנושא הפונקציה הקווית והגיאומטריה האנליטית. נלמד כיצד לפתור בעיה במספר שלבים וכיצד לרשום את הפתרון בצורה מסודרת

כפי שלמדנו בגיאומטריה, אנחנו רוצים לחשוב על תוכנית פתרון לפני שמבצעים את החישובים בפתרון נשלב את מה שידוע לנו בגיאומטריה ופונקציה קווית. לדוגמה בשאלה על מקבילית נשתמש בתכונות כמו צלעות נגדיות מקבילות ואלכסונים חוצים זא"ז

כלים לפתרון בעיות

תזכורת: כל נקודה הנמצאת על הישר מקיימת את משוואת הישר, ולהיפך!

כל נקודה מתוארת ע"י זוג סדור (x, y) אשר קובע את מיקום הנקודה במערכת הצירים.

בכיתה ח' למדנו לבצע את הפעולות הבאות (המספור של הכללים שרירותי ונועד לאפשר התייחסות לכלל בתוך מסמך זה).

מציאת שיפוע של ישר על פי שתי נקודות (#1)

אם נתונות שתי נקודות A, B, השיפוע של הישר שעובר דרכן נתון בנוסחה

$$m_{AB} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$$

מאחר שבתרגילים יש מספר ישרים ולכל ישר שיפוע משלו נשתמש בצורת סימון שמבהירה באיזה ישר מדובר. לדוגמה, עבור הישר AB נסמן את השיפוע כ- m_{AB} . באופן דומה נסמן את שיעורי הנקודה A ב- (x_A, y_A)

מציאת משוואת ישר לפי נקודה על הישר ושיפוע (#2)

נתון שיפוע m ונקודה A, משוואת הישר מקיימת $y_A = mx_A + b$ ומכאן ניתן לחלץ את b ולגלות את משוואת הישר.

מציאת משוואת ישר לפי שתי נקודות (#3)

בעזרת #1 נוכל למצוא את שיפוע הישר העובר בין שתי הנקודות. בעזרת #2 נוכל למצוא את משוואת הישר.

לישרים מקבילים שיפוע זהה (#4)

למציאת משוואת ישר העובר דרך נקודה נתונה וישר מקביל נשתמש ב #2 שכן לישרים מקבילים שיפוע זהה

נקודת חיתוך של שני ישרים (#5)

נקודת החיתוך של שני ישרים נמצאת על שני הישרים בו זמנית ולכן מקיימת את המשוואות של שני הישרים. זוהי מערכת משוואת שפתרונה נותן את נקודת החיתוך. אם אין פתרון הרי שהישרים מקבילים ואם יש אינסוף פתרונות הרי שהישרים מתלכדים

שיפוע של ישרים מאונכים זה לזה (#6)

אם נתון $AB \perp CD$ הרי שהשיפועים שלהם מקיימים $m_{AB} \cdot m_{CD} = -1$. גם הטענה ההפוכה נכונה.

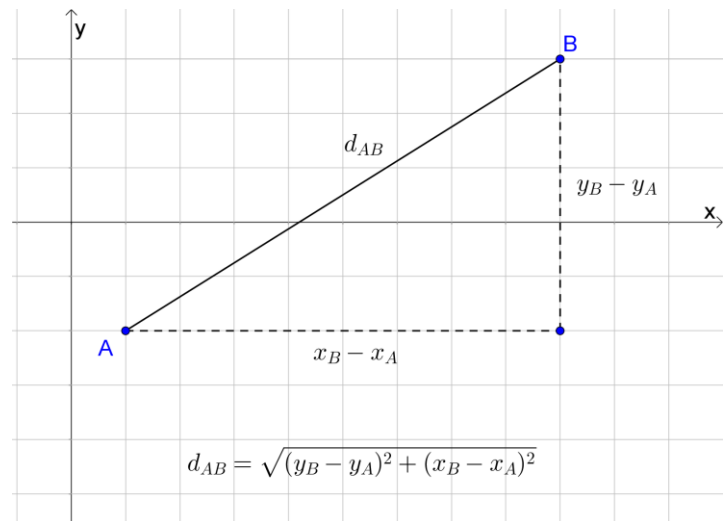
מציאת מרחק בין שתי נקודות (#7)

נוסחת חישוב מרחק בין שתי נקודות A, B

$$d_{AB} = \sqrt{(y_A - y_B)^2 + (x_A - x_B)^2}$$

נשים לב כי כאשר שתי הנקודות נמצאות על ישר המקביל לאחד הצירים ניתן למצוא את המרחק בחישוב פשוט.

הסבר לנוסחת המרחק בעזרת משפט פיתגורס



מציאת נקודת אמצע בין שתי נקודות נתונות (#8)

נקודת האמצע בין שתי נקודות A, B היא הממוצע של שיעורי x, y של הנקודות

$$\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right)$$

פתרון בעיות

בעזרת הכלים האלה נוכל לפתור בעיות בגיאומטריה אנליטית. מטרת השיעור לתרגל את השימוש בכלים הללו ואת הדרך הטובה לרישום הפתרון. הפתרונות הרשומים חלקיים. השלימו את החישובים וודאו שדרך הפתרון מובנת לכם.

תרגיל 1

נתונה מקבילית ABCD ושיעורי הקדקודים שלה A(4,2), B(8,3), D(6,8)

א. מצאו את משוואת הישר של הצלעות BC, DC

ב. מצאו את שיעורי הנקודה C

פתרון

א. מציאת משוואת הישר BC

נתון כי זו מקבילית, ולכן $BC \parallel AD$. לפי כללים #1 + #4

$$m_{BC} = m_{AD} = \frac{y_A - y_D}{x_A - x_D} = \frac{2 - 8}{4 - 6} = 3$$

נמצא את משוואת הישר BC לפי כלל #2 עבור הנקודה B והשיפוע m_{BC}

הנקודה B נמצאת על הישר BC ולכן מתקיים

$$BC: y_B = m_{BC}x_B + b, \quad b = y_B - m_{BC}x_B = 3 - 3 \cdot 8 = -21$$

$$BC: y = 3x - 21$$

באופן דומה נמצא את משוואת הישר DC

$$DC: y = \frac{1}{4}x + 6\frac{1}{2}$$

ב. נמצא את נקודת החיתוך של שני הישרים לפי #5. הנקודה מקיימת את שתי המשוואות ולכן

$$3x - 21 = \frac{1}{4}x + 6\frac{1}{2}$$

ע"י פתרון המשוואה והצבה נקבל $C(10, 9)$

נשים לב כי לא היה צורך למצוא את משוואות הישר AB. **עבודה לפי תוכנית עוזרת לנו לחשב רק את מה שנדרש לצורך הפתרון**

תרגיל 2

הוכיחו כי המרובע ABCD שקדקודיו נתונים הוא מקבילית

$$A(2,1), B(4,5), C(8,6), D(6,2)$$

פתרון:

נמצא את שיפועי כל הישרים שעליהם מונחות הצלעות לפי כלל #1

$$m_{AB} = m_{CD}, \quad m_{BC} = m_{DA}$$

השלימו את החישוב

תרגיל 3

במקבילית ABCD הצלע AB מונחת על הישר $y=x-6$ והאלכסון BD מונח על הישר $y=3x-4$. נתונים שיעורי הנקודה $C(-3, -3)$

מצאו את שיעורי הנקודה A

נרשום תוכנית פתרון מהסוף להתחלה

א. הנקודה A היא מפגש הישרים AD, AB. נמצא את משוואות הישרים ונפתור

ב. הנקודה D היא מפגש הישרים CD, BD

ג. הישר CD עובר דרך הנקודה C ומקביל לישר AB

נרשום עתה פתרון מסודר המשתמש בכלים שאנו מכירים לפי התוכנית הנ"ל. (עבודה עצמית)

תרגיל 4

נתונה מקבילית ABCD: $A(3,2), B(11,4), D(5, 10)$. משוואת האלכסון AC היא $y=x-1$

מצאו את אורכי האלכסונים

פתרון

א. נחשב את אורך האלכסון BD לפי #7

$$d_{BD} = \sqrt{(y_D - y_B)^2 + (x_D - x_B)^2} = \sqrt{(10 - 4)^2 + (5 - 11)^2} = 6\sqrt{2}$$

ב. מציאת אורך האלכסון AC

ניתן למצוא את שיעורי הנקודה C כפי שעשינו בתרגילים קודמים, ואז לחשב את אורך האלכסון AC. אך יש פתרון קצר יותר

במקבילית האלכסונים חוצים זה את זה. נסמן את נקודת החיתוך ב-M

1. נמצא את משוואת הישר BD לפי #3

2. נמצא את נקודת החיתוך של האלכסונים AC, BD לפי #5

3. נמצא את המרחק d_{AM} לפי #7

4. האלכסונים חוצים זה את זה ולכן $d_{AC} = 2 d_{AM}$

האם תוכלו למצוא דרך פתרון קצרה עוד יותר? היעזרו בכלל #8

תרגיל 5

נתון מרובע ABCD שקדקודיו $A(11, -7)$, $B(12, 1)$, $C(6, 3)$, $D(4, -3)$

א. הוכיחו כי $DB \perp AC$

ב. הוכיחו כי האלכסון AC חוצה את האלכסון DB

ג. מהו המרובע ABCD?

פתרון

א. אלכסונים מאונכים

נמצא את שיפוע הישר AC לפי #1 $m_{AC} = \dots$

נמצא את שיפוע הישר BD לפי #1 $m_{BD} = \dots$

נבדוק שהישרים אכן מאונכים לפי #6 $m_{AC} \cdot m_{BD} = -1$

ב. אלכסון AC חוצה את BD

נמצא את משוואת הישר AC לפי #2

נמצא את משוואת הישר BD לפי #2

נמצא את נקודת החיתוך של AC, BD לפי #5

נמצא את אורכי הקטעים BM, DM לפי #7 ונראה $d_{BM} = d_{DM}$

ג. מרובע שבו אלכסון אחד מאונך וחוצה אלכסון שני הוא דלתון

השלימו את החישוב בסעיפים א' ב'

תרגיל 6

במלבן ABCD נתונים שיעורי הנקודות $A(2,1)$, $B(6,3)$. משוואת האלכסון BD $3x+4y=30$

מצאו את שיעורי הנקודה D

פתרון

הפתרון מבוסס על הגדרת המלבן: מרובע בעל 4 זוויות ישרות, כלומר צלעות סמוכות מאונכות זו לזו

נמצא את שיפוע הישר AB לפי #1

נמצא את שיפוע הישר AD (מאונך ל AB) לפי #6

נמצא את משוואת הישר AD לפי #2

נמצא את נקודת החיתוך D בין הישרים AD, BD לפי #5

שימו לב כי משוואת האלכסון BD ניתנה בצורה סתומה $3x+4y=30$ ונדרש להפוך אותה לצורה מפורשת

$$y = -\frac{3}{4}x + 6\frac{1}{2}$$

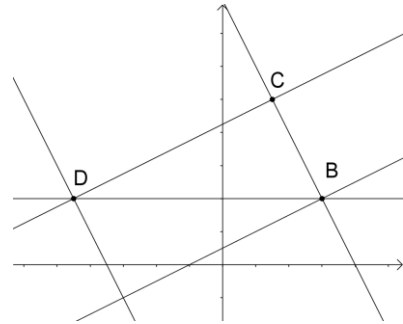
השלימו את החישוב

תשובה $D(-2, 9)$

תרגיל 7

במלבן ABCD נתון $C(3, 10)$, $B(6, 4)$. האלכסון BD מקביל לציר x.

- א. מצאו את שיעורי הקדקוד D
 ב. חשבו את שטח המלבן



תשובות

- א. $(-9, 4)$
 ב. 90 יח"ש

תרגילים נוספים לעבודה עצמית

רשמו את שלבי הפתרון כפי שנעשה בדוגמאות הנ"ל

8. במלבן ABCD נתון $A(1, 6)$, הצלע AB מקבילה לציר x ומשוואת האלכסון BD היא $y=2x-2$

- א. מצאו את משוואת הצלע DC
 ב. חשבו את היקף המלבן

תשובות א. $y=0$ ב. 18

9. נתונות הנקודות $A(0, 2)$, $B(2, 5)$, $C(5, 0)$

מצאו את שיעורי הנקודה D כך שהמרובע ABCD יהיה מקבילית
 תשובה: $(3, -3)$

10. אתגר

נתון הישר $3x+4y=10$ והנקודה $A(-6, -18)$

מצאו את מרחק הנקודה מהישר

תשובה: 20