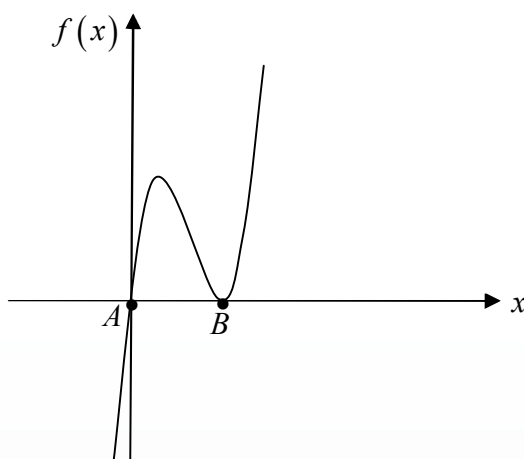


שאלה 8 מתוך קיץ 2017 מועד ב' (שאלון 804 בגרות במתמטיקה)

לפניך סרטוט של גרף הפונקציה $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$



א. מצא את שיעורי הנקודות A ו-B, נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה-x.

הנקודה C נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$.

נתון: $x_A < x_C < x_B$.

(שיעור ה-x של הנקודה C נמצא בין שיעור ה-x של הנקודה A לשיעור ה-x של הנקודה B).

ב. מצא את שיעורי הנקודה C שעבורה שטח המשולש ABC הוא מקסימלי.

ג. האם נקודה C היא נקודת קיצון של הפונקציה $f(x)$? הסבר.

פתרון: א. $(0,0)$, $(3,0)$ ב. $(1,4)$ ג. כן

פתרון מלא:

סעיף א'

מציאת נקודות חיתוך עם הצירים

מציאת נקודות חיתוך עם ציר ה-x (נציב $y=0$)

$$f(x) = 0 \rightarrow x^3 - 6x^2 + 9x = 0 \rightarrow x(x^2 - 6x + 9) = 0$$

$$\swarrow$$

$$x = 0$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{(0,0)}$$

$$\searrow$$

$$x^2 - 6x + 9 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 36}}{2}$$

$$\rightarrow x_{1,2} = \frac{6}{2} = 3 \rightarrow \boxed{(3,0)}$$

מציאת נקודות חיתוך עם ציר ה- y (נציב $x=0$)

$$x=0 \rightarrow f(x)=0^3-6\cdot 0^2+9\cdot 0=0 \rightarrow \boxed{(0,0)}$$

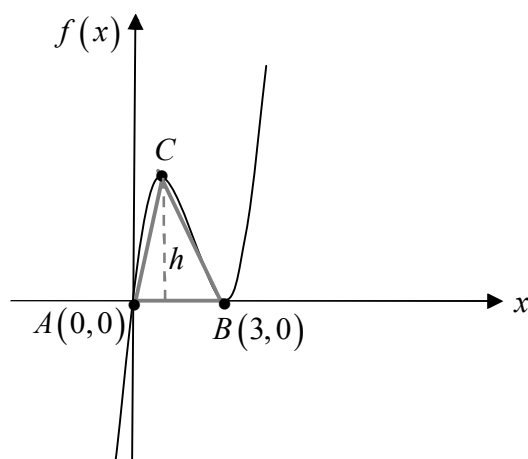
לסיכום, נקודות חיתוך עם הצירים: $\boxed{(0,0), (3,0)}$

תשובה סופית סעיף א'

סעיף ב'

נוסיף את נקודה C לסרטוט:

נתון: הנקודה C נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$, $x_A < x_C < x_B$



שלב א': נסמן x ו- y

$$x_C = x$$

$$y = S_{\triangle ABC}$$

שלב ב': נמצא את $y(x)$

$$y = S_{\triangle ABC} = \frac{\text{צלע } X \text{ גובה}}{2} = \frac{\overbrace{h}^{y_C} \cdot AB}{2} \stackrel{\text{ראו חישוב עזר}}{=} \frac{(x_C^3 - 6x_C^2 + 9x_C) \cdot 3}{2} = \frac{3x_C^3 - 18x_C^2 + 27x_C}{2}$$

חישוב עזר:

נמצא את שיעורי נקודה C:

נקודה C נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$, כלומר:

$$f(x_C) = x_C^3 - 6x_C^2 + 9x_C \rightarrow \boxed{C(x_C, x_C^3 - 6x_C^2 + 9x_C)}$$

נמצא את h - גובה המשולש ABC

$$h = y_C = \boxed{x_C^3 - 6x_C^2 + 9x_C}$$

נמצא את אורך AB:

$$AB = x_B - x_A = 3 - 0 = \boxed{3}$$

שלב ג': נמצא את $y'(x)=0$

$$y = \frac{3x_C^3 - 18x_C^2 + 27x_C}{2}$$

$$y' = \frac{3 \cdot 3x_C^2 - 18 \cdot 2x_C + 27}{2} = \boxed{\frac{9x_C^2 - 36x_C + 27}{2} = 0}$$

$$\rightarrow \frac{9x_C^2 - 36x_C + 27}{2} = 0 \xrightarrow{\cdot 2} 9x_C^2 - 36x_C + 27 = 0 \xrightarrow{:9} x_C^2 - 4x_C + 3 = 0$$

$$\rightarrow x_{C1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \begin{matrix} \nearrow \\ \searrow \end{matrix}$$

$$x_C = 3$$

$$x_C = 1$$

נתון כי: $x_A < x_C < x_B$, כלומר: $0 < x_C < 3$ ולכן: $\boxed{x_C = 1}$

שלב ד': נמצא את $y''(x)$

$$y' = \frac{9x_C^2 - 36x_C + 27}{2}$$

$$y'' = \frac{9 \cdot 2x_C - 36}{2} = \frac{18x_C - 36}{2} \stackrel{/:2}{=} 9x_C - 18$$

$$y''(1) = 9 \cdot 1 - 18 = 9 - 18 = -9 < 0 \rightarrow \max$$

שלב ה' נשיב על המתבקש
נמצא את שיעורי הנקודה C

$$\begin{cases} x_C = 1 \\ y_C = x_C^3 - 6x_C^2 + 9x_C = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 = 1 - 6 + 9 = 4 \end{cases} \rightarrow \boxed{C(1,4)}$$

סעיף ג'

ניתן לראות כי שטח המשולש ABC תלוי בשיעור ה- y של נקודה C

$$S_{\triangle ABC} = \frac{\overbrace{(x_C^3 - 6x_C^2 + 9x_C)}^{y_C}}{2} \cdot 3$$

על מנת ששטח המשולש ABC יהיה מקסימלי, גם שיעור ה- y של נקודה C צריך להיות מקסימלי. ולכן הנקודה C צריכה להיות בנקודת הכי גבוהה של הפונקציה בתחום הנתון: $0 < x_C < 3$, כלומר בנקודת המקסימום המוחלט שלה.

לכן, ניתן להסיק כי נקודה C היא נקודת קיצון של הפונקציה $f(x)$