

שאלה 1 מתוך קיץ 2016 מועד ב' (שאלון 805 בגרות במתמטיקה 4 יחידות)

נתונה סדרה המקיימת את הכלל $a_{n+1} = a_n - 4$ לכל n טבעי.
האיבר השלישי בסדרה הוא 12.
א. מצא את האיבר הראשון.

בסדרה זו 71 איברים.
ב. חשב את הסכום של 10 האיברים האחרונים בסדרה.
ג. מצא את האיבר האמצעי בסדרה.

פתרון: א. 20 ב. 2420 ג. -120

פתרון מלא:

סעיף א'

נתון כי הסדרה מקיימת $a_{n+1} = a_n - 4$, נתון כי האיבר השלישי בסדרה הוא 12.

נציב $a_3 = 12$ ב- $a_{n+1} = a_n - 4$:

$$a_{2+1} = a_2 - 4 \rightarrow \underbrace{a_3}_{12} = a_2 - 4 \rightarrow 12 = a_2 - 4 \rightarrow \boxed{a_2 = 16}$$

נציב $a_2 = 16$ ב- $a_{n+1} = a_n - 4$:

$$a_{1+1} = a_1 - 4 \rightarrow \underbrace{a_2}_{16} = a_1 - 4 \rightarrow 16 = a_1 - 4 \rightarrow \boxed{a_1 = 20}$$

תשובה סופית סעיף א'

סעיף ב'

תחילה נוכיח כי הסדרה הנ"ל הינה סדרה חשבונית:

$$a_{n+1} = a_n - 4 \rightarrow \underbrace{a_{n+1} - a_n}_d = -4 \rightarrow d = -4$$

הפרש הסדרה הוא מספר קבוע, ולכן הסדרה הינה סדרה חשבונית, שבה:

$$\boxed{\begin{matrix} a_1 = 20 \\ d = -4 \end{matrix}}$$

נתון כי בסדרה ישנם 71 איברים, כלומר:

$$\underbrace{a_1, a_2, \dots, a_{60}, a_{61}}_{S_{61}}, \underbrace{a_{62}, \dots, a_{70}, a_{71}}_{S_{10}} \quad \text{אחרונים} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{S_{71}}$$

נמצא את סכום עשרת האיברים האחרונים:

נסדר את הנתונים ונמצא את סכום 71 האיברים:

$$\begin{cases} a = 20 \\ d = -4 \\ n = 71 \\ S_n = ? \end{cases}$$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d] \rightarrow S_{71} = \frac{71}{2}[2 \cdot 20 + (71-1) \cdot (-4)] = 35.5[40 - 280] = \boxed{-8520}$$

נסדר את הנתונים ונמצא את סכום 62 האיברים הראשונים:

$$\begin{cases} a = 20 \\ d = -4 \\ n = 61 \\ S_n = ? \end{cases}$$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d] \rightarrow S_{62} = \frac{61}{2}[2 \cdot 20 + (61-1) \cdot (-4)] = 30.5[40 - 240] = \boxed{-6100}$$

נמצא את סכום 10 האיברים האחרונים (על ידי חיסור הסכומים)

$$S_{10} = S_{71} - S_{62} = -8520 - (-6100) = \boxed{-2420}$$

תשובה סופית סעיף ב'

סעיף ג'

תחילה, נמצא את מיקום האיבר האמצעי:

בסדרה ישנם 71 איברים, ולכן האיבר האמצעי הוא:

$$\frac{71+1}{2} = \frac{72}{2} = \boxed{36}$$

נסדר את הנתונים, ונמצא את האיבר ה-36:

$$\begin{cases} a = 20 \\ d = -4 \\ n = 36 \\ a_n = ? \end{cases}$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d \rightarrow a_{36} = 20 + (36-1) \cdot (-4) = \boxed{-120}$$

תשובה סופית סעיף ג'