

שאלה 1 מתוך חורף 2016 (שאלון 805 בגרות במתמטיקה 4 יחידות)

נתונה סדרה חשבונית שהאיבר הכללי שלה הוא $a_n = 3n - 12$,
ונתונה סדרה המוגדרת על ידי הכלל $b_n = 2a_n + 1$.

- א. (1) הראה כי $b_n = 6n - 23$
- (2) הוכח כי הסדרה b_n היא סדרה חשבונית.
- ב. נתון כי האיבר האחרון בסדרה b_n הוא 79.
מצא את מספר האיברים בסדרה b_n .
- ג. נתון כי בסדרה a_n ובסדרה b_n יש אותו מספר איברים.
מצא את סכום האיברים במקומות האי-זוגיים בסדרה a_n .

פתרון: א(1). הוכחה א(2). הוכחה ב. 17 איברים ג. 135

פתרון מלא:

סעיף א'(1)

נתון כי $b_n = 2a_n + 1$ ו- $a_n = 3n - 12$.
נציב את $a_n = 3n - 12$ ב- $b_n = 2a_n + 1$

$$b_n = 2 \underbrace{a_n}_{3n-12} + 1 \rightarrow b_n = 2(3n - 12) + 1 \rightarrow b_n = 6n - 24 + 1 \rightarrow \boxed{b_n = 6n - 23}$$

תשובה סופית סעיף א'(1)

סעיף א'(2)

נוכיח כי הסדרה b_n היא סדרה חשבונית:

$$b_{n+1} - b_n = \underbrace{6(n+1) - 23}_{b_{n+1}} - \underbrace{(6n - 23)}_{b_n} = 6n + 6 - 23 - 6n + 23 = \boxed{6}$$

קיבלנו מספר קבוע שאינו תלוי ב- n , כלומר הסדרה b_n היא סדרה חשבונית.

תשובה סופית סעיף א'(2)

סעיף ב'

דרך א' -

נתון כי $b_n = 79$.

נציב את $b_n = 79$ ב- $b_n = 6n - 23$:

$$b_n = 6n - 23 \rightarrow 79 = 6n - 23 \rightarrow 6n = 102 \rightarrow \boxed{n = 17}$$

דרך ב' –

נמצא את הפרש הסדרה b_n

$$b_{n+1} - b_n = 6$$

נמצא את האיבר הראשון בסדרה

$$b_1 = 6 \cdot 1 - 23 = 6 - 23 = \boxed{-17}$$

נסדר את הנתונים:

$$\begin{cases} d = 6 \\ b_1 = -17 \\ b_n = 79 \\ n = ? \end{cases}$$

$$b_n = b_1 + (n-1)d \rightarrow 79 = -17 + (n-1) \cdot 6 \rightarrow 79 = -17 + 6n - 6 \rightarrow 6n = 102 \rightarrow \boxed{n = 17}$$

תשובה סופית סעיף ב'

סעיף ג'

נמצא את הפרש הסדרה a_n

$$d = a_{n+1} - a_n = 3(n+1) - 12 - (3n - 12) = 3n + 3 - 12 - 3n + 12 = \boxed{3}$$

נמצא את האיבר הראשון בסדרה

$$a_1 = 3 \cdot 1 - 12 = 3 - 12 = \boxed{-9}$$

אנו מחפשים את סכום האיברים במקומות האי זוגיים, כלומר:

$$\begin{matrix} +3 \\ \curvearrowright \\ a_1, a_2, \dots, a_{17} \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} +6 & +6 \\ \curvearrowright & \curvearrowright \\ a_1, a_3, a_5, \dots, a_{17} \end{matrix}$$

נתון כי מספר האיברים בשתי הסדרות זהה, כלומר ישנם 17 איברים.
נסדר את הנתונים:

$$\begin{cases} d^* = 6 \\ a_1 = -9 \\ n^* = \frac{17+1}{2} = 9 \\ S_n^* = ? \end{cases}$$

$$S_n^* = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d] = \frac{9}{2} [2 \cdot (-9) + (9-1) \cdot 6] = 4.5 [-18 + 48] = \boxed{135}$$

תשובה סופית סעיף ג'