<u>שאלה 1 מתוך חורף 2017 (שאלון 805 בגרות במתמטיקה 4 יחידות)</u>

נתונה סדרה המקיימת את הכלל $a_{n+1}=a_n-2n+3$.

מגדירים סדרה חדשה המקיימת: $b_n=a_n+n^2$.

א. הוכח שהסדרה b_n היא סדרה חשבונית.

נתון $a_3=2$.

ב. הבע את b_n באמצעות n .

ג. בסדרה b_n יש 31 איברים. חשב את סכום האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים בסדרה זו.

פתרון: א. הוכחה **ב.** $b_n=4n-1$ **ג.** 1008

<u>פתרון מלא:</u>

נתון:

$$a_{n+1}=a_n-2n+3$$
$$b_n=a_n+n^2$$

<u>סעיף א'</u>

כדי להוכיח ש- b_n היא סדרה חשבונית עלינו להראות כי

$$d=b_{n+1}-b_n=\text{מספר קבוע ללא } n$$

נמצא את b_{n+1}

נציב במקום n את $n+1$ ונקבל:

$$b_{n+1}=a_{n+1}+(n+1)^2=a_{n+1}+n^2+2n+1$$

<u>נציב את הנתון $a_{n+1}=a_n-2n+3$ ונקבל:</u>

$$b_{n+1}=\underbrace{a_{n+1}}_{a_n-2n+3}+n^2+2n+1=a_n\cancel{-2n}+3+n^2+\cancel{2n}+1=\boxed{a_n+n^2+4}$$

נראה ש- $d=b_{n+1}-b_n=\text{מספר קבוע ללא } n$

$$d=\underbrace{b_{n+1}}_{a_n+n^2+4}-\underbrace{b_n}_{a_n+n^2}=a_n+n^2+4-\left[a_n+n^2\right]=\cancel{a_n}+\cancel{n^2}+4\cancel{-a_n}\cancel{-n^2}$$

$$\rightarrow\ d=4\ \rightarrow\ \text{קיבלנו מספר קבוע ללא } n\ \rightarrow\ \boxed{b_n \text{ סדרה חשבונית}}$$

מ.ש.ל סעיף א'

<u>סעיף ב'</u>

נמצא את b_3

נתון

$a_3=2$

נציב $n=3$ ב- $b_n=a_n+n^2$ ונקבל:

$$b_3=\underbrace{a_3}_{2}+3^2=2+9=\boxed{11}$$

נמצא את b_1

$b_3=11$ (מצאנו)

$d=4$ (מצאנו)

$n=3$

$b_1=?$

$$\underbrace{b_n}_{\overset{\uparrow}{11}}=\underbrace{b_1}_{\overset{\uparrow}{?}}+(\underset{\overset{\uparrow}{3}}{n}-1)\underset{\overset{\uparrow}{4}}{d}\ \rightarrow\ 11=b_1+(3-1)\cdot 4\ \rightarrow\ 11=b_1+2\cdot 4\ \rightarrow\ 11=b_1+8$$

$$\rightarrow\ 3=b_1\ \rightarrow\ \boxed{b_1=3}$$

נמצא את b_n (נביע באמצעות n)

$$\begin{cases} b_1=3 \\ d=4 \\ n=n \\ b_n=? \end{cases}$$

$$b_n=b_1+(n-1)\cdot d\ \rightarrow\ b_n=3+(n-1)\cdot 4\ \rightarrow\ b_n=3+4n-4\ \rightarrow\ \boxed{b_n=4n-1}$$

תשובה סופית סעיף ב'

<u>סעיף ג'</u>

אנו מחפשים את סכום האיברים במקומות האי זוגיים, כלומר:

$$\overbrace{b_1,\ b_2\ ,\ b_3\ ,\ b_4\ \ ,\dots,\ \ b_{31}}^{\text{31 איברים}}$$

$$b_1\ ,\ b_1+4\ ,\ b_1+8\ ,\ b_1+12\ ,\dots,\ b_{31}\qquad\rightarrow\qquad b_1,\ b_3,\ \dots\ ,\ b_{31}$$

+4

+8

+8

נתון כי בסדרה יש 31 איברים.
נסדר את הנתונים:

$$\begin{cases} b_1{*} = a_1 = 3 \\ d{*} = 8 \\ n{*} = \frac{n+1}{2} = \frac{31+1}{2} = \frac{32}{2} = 16 \\ S_n{*} = ? \end{cases}$$

$$S_n{*} = \frac{n{*}\left[2a_1{*} + (n{*}-1)d{*}\right]}{2} = \frac{16\left[2\cdot 3 + (16-1)\cdot 8\right]}{2} = 8\left[6 + 15\cdot 8\right] = \boxed{1008}$$

תשובה סופית סעיף ג'