שאלה 1 מתוך קיץ 2017 (שאלון 805 בגרות במתמטיקה 4 יחידות)

נתונה סדרה המקיימת: $a_1 = 0$, $a_{n+1} = a_n + 2n + 5$ לכל n טבעי.

א. חשב את האיברים a_2 ו- a_3

מגדירים סדרה חדשה: $b_n = a_{n+1} - a_n$

ב. הבע את b_n באמצעות n.

ג. הוכח שהסדרה b_n היא סדרה חשבונית, ומצא את ההפרש שלה.

ד. נתון כי סכום n האיברים הראשונים בסדרה b_n שווה ל- a_5. מצא את n.

פתרון: **א.** $a_3 = 16$, $a_2 = 7$ **ב.** $b_n = 2n + 5$ **ג.** $d = 2$ **ד.** $n = 4$

פתרון מלא:

סעיף א'

נמצא את a_2 ו- a_3 (נציב $n=1$ ו- $n=2$ בכלל הנסיגה)

$$\underline{a_{n+1} = a_n + 2n + 5}$$

$$a_1 = 0$$

$$n=1: \quad a_2 = a_1 + 2\cdot 1 + 5 = 0 + 2 + 5 = 7 \quad \rightarrow \quad \boxed{a_2 = 7}$$

$$n=2: \quad a_3 = a_2 + 2\cdot 2 + 5 = 7 + 4 + 5 = 16 \quad \rightarrow \quad \boxed{a_3 = 16}$$

תשובה סופית סעיף א'

סעיף ב'

$$\overbrace{a_{n+1} = a_n + 2n + 5}^{\text{נתון}} \quad \rightarrow \quad a_{n+1} - a_n = 2n + 5$$

נמצא את b_n

נציב את $a_{n+1} - a_n = 2n + 5$ ב- $b_n = a_{n+1} - a_n$

$$b_n = \underbrace{a_{n+1} - a_n}_{2n+5} \quad \rightarrow \quad \boxed{b_n = 2n + 5}$$

סעיף ג'

כדי להוכיח ש- b_n סדרה חשבונית עלינו להראות כי:

$d = b_{n+1} - b_n =$ מספר קבוע ללא n

נמצא את b_{n+1}

נציב במקום n את $n+1$ ב - $b_n = 2n+5$ ונקבל:

$$b_{n+1} = 2(n+1)+5 = 2n+2+5 = \boxed{2n+7}$$

נראה ש- $d = b_{n+1} - b_n =$ מספר קבוע ללא n

נציב את $b_n = 2n+5$ ואת $b_{n+1} = 2n+7$ ונקבל:

$$d = \underbrace{b_{n+1}}_{2n+7} - \underbrace{b_n}_{2n+5} = 2n+7-(2n+5) = \cancel{2n}+7-\cancel{2n}-5 = 2$$

$\rightarrow$ $d=2$ $\rightarrow$ קיבלנו מספר קבוע ללא n $\rightarrow$ $\boxed{\text{סדרה חשבונית } b_n \text{ שההפרש שלה הוא } d=2}$

תשובה סופית סעיף ג'

סעיף ד'

נמצא את האיבר הראשון b_1 בסדרה b_n

$$n=1: \quad b_n = 2n+5 \rightarrow b_1 = 2\cdot 1+5 \rightarrow \boxed{b_1 = 7}$$

נתון כי סכום n האיברים הראשונים בסדרה b_n שווה ל- a_5

<u>מצד אחד –</u>

נמצא את סכום n האיברים הראשונים בסדרה b_n.

נסדר את הנתונים:

$$\begin{cases} b_1 = 7 \\ d = 2 \\ n = n \\ S_n = ? \end{cases}$$

$$S_n = \frac{n}{2}[2b_1+(n-1)d] = \frac{n}{2}[2\cdot 7+(n-1)2] = \frac{n}{2}[14+2n-2] = \frac{n(2n+12)}{2} = \frac{\cancel{2}n(n+6)}{\cancel{2}}$$

$$\rightarrow S_n = n(n+6) = n^2+6n \rightarrow \boxed{S_n = n^2+6n}$$

<u>מצד שני -</u>

נמצא את a_5

$$\underline{a_{n+1}=a_n+2n+5}$$
$$a_3=16$$

$$n=3: \quad a_4=a_3+2\cdot3+5=16+6+5=27 \quad \rightarrow \quad \boxed{a_4=27}$$

$$n=4: \quad a_5=a_4+2\cdot4+5=27+8+5=40 \quad \rightarrow \quad \boxed{a_5=40}$$

<u>נשווה בין שני הערכים:</u>

נתון כי סכום n האיברים הראשונים בסדרה b_n שווה ל- a_5

$$\begin{cases} S_n=n^2+6n \\ a_5=40 \end{cases} \quad \rightarrow \quad S_n=a_5 \quad \rightarrow \quad n^2+6n=40 \quad \rightarrow \quad n^2+6n-40=0$$

$$\rightarrow \quad n_{1,2}=\frac{-6\pm\sqrt{6^2-4\cdot1\cdot(-40)}}{2\cdot1}=\frac{-6\pm\sqrt{36+160}}{2}=\frac{-6\pm\sqrt{196}}{2}=\frac{-6\pm14}{2} \quad \begin{matrix} \nearrow \ \cancel{n_2=2} \ (n>0) \\ \searrow \ \boxed{n_1=4} \end{matrix}$$

תשובה סופית סעיף ד'