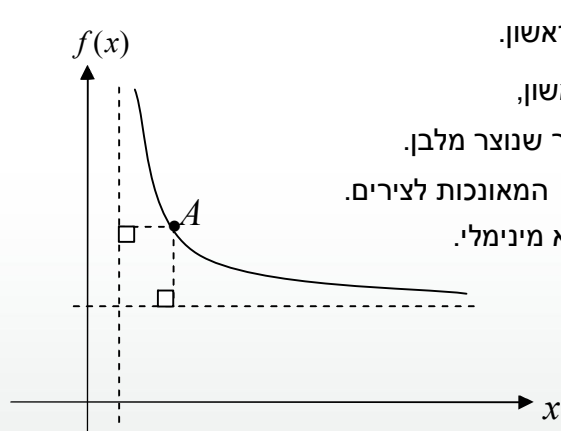


שאלה 8 מתוך קיץ 2018 מועד ב' (שאלון 804 בגרות במתמטיקה 4 יחידות)



לפניך ציור של גרף הפונקציה $f(x) = \frac{4}{x-1} + 3$ ברביע הראשון.

מנקודה A, הנמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ ברביע הראשון,

העבירו אנכים לאסימפטוטות של גרף הפונקציה $f(x)$, כך שנוצר מלבן.

א. מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים.

ב. מצא את שיעורי הנקודה A שבעבורה היקף המלבן הוא מינימלי.

ג. חשב את שטח המלבן שהיקפו מינימלי.

פתרון: א. $x=1$, $y=3$ ב. $A(3,5)$ ג. 4 יח"ר

פתרון מלא:

סעיף א'

מצאית אסימפטוטות

אסימפטוטות אנכיות:

למצאית אסימפטוטות אנכיות נשווה את המכנה לאפס:

$$0 = \text{מכנה} \rightarrow x-1=0 \rightarrow \boxed{x=1}$$

אסימפטוטה
אנכית

אסימפטוטות אופקיות:

למצאית אסימפטוטות אופקיות נבדוק את מעלת המונה ומעלת המכנה:

$$f(x) = \frac{4}{x-1} + 3 = \frac{4+3(x-1)}{x-1} = \frac{4+3x-3}{x-1} = \frac{3x+1}{x-1}$$

$$f(x) = \frac{\boxed{3}x^{\boxed{1}} + 1}{\boxed{1}x^{\boxed{0}} - 1} \rightarrow \begin{array}{l} \text{החזקה במונה} \\ \text{שווה לחזקה} \\ \text{במכנה} \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} \text{נחלק את} \\ \text{המקדמים} \\ \text{של } x \end{array} \rightarrow y = \frac{3}{1} \rightarrow \boxed{y=3}$$

אסימפטוטה
אופקית

לסיכום, האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$: $\boxed{x=1}$, $\boxed{y=3}$

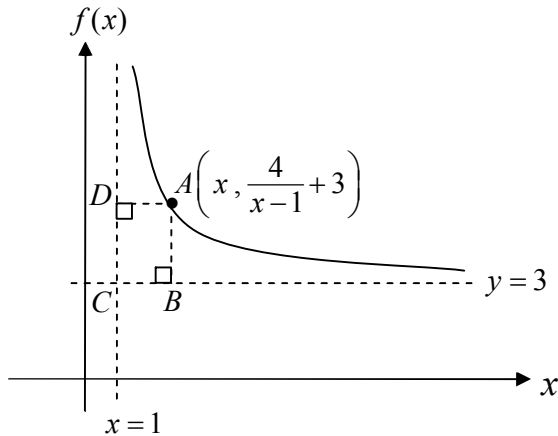
תשובה סופית סעיף א'

סעיף ב'

נתון כי הנקודה A נמצאת על הפונקציה $f(x)$ ולכן:

$$A\left(x, \frac{4}{x-1} + 3\right)$$

נעדין את הציר:



שלב א' – נסמן x ו- y

$$x = x_A$$

$$y = \text{היקף המלבן}$$

שלב ב' – נמצא את $y(x)$

$$y = \text{היקף המלבן} = 2 \underbrace{AB}_{\frac{4}{x-1}} + 2 \cdot \underbrace{AD}_{x-1} \overset{\substack{\text{ראו חישוב} \\ \text{עזר}}}{=} 2 \cdot \left(\frac{4}{x-1}\right) + 2 \cdot (x-1) = \frac{8}{x-1} + 2 \cdot (x-1) = \boxed{\frac{8}{x-1} + 2x - 2}$$

חישוב עזר:

נמצא את שיעורי הנקודות B ו- D

נמצא את שיעורי הנקודה B
AB מקביל לציר ה- y ולכן:

$$x_B = x_A = x$$

נקודה B נמצאת על האסימפטוטה $y = 3$ ולכן

$$y_B = 3$$

כלומר: $B(x, 3)$

נמצא את שיעורי הנקודה D

נקודה D נמצאת על האסימפטוטה $x=1$ ולכן:

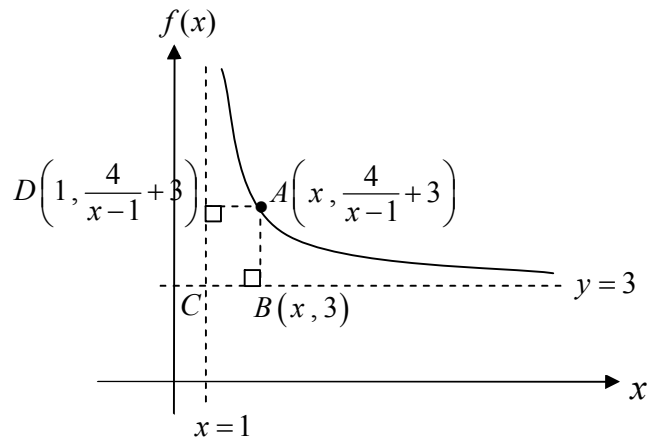
$$x_D = 1$$

AD מקביל לציר ה- x ולכן:

$$y_D = y_A = \frac{4}{x-1} + 3$$

כלומר: $D\left(1, \frac{4}{x-1} + 3\right)$

נעדכן את הציור:



נמצא את אורך AB:

$$AB = y_A - y_B = \frac{4}{x-1} + 3 - 3 = \frac{4}{x-1}$$

נמצא את אורך AD:

$$AD = x_A - x_D = x - 1$$

שלב ג' - $y'(x) = 0$

$$y = \frac{8}{x-1} + 2x - 2$$

$$y' = \frac{\overbrace{(8)'}^0 (x-1) - 8 \overbrace{(x-1)'}^1}{(x-1)^2} + 2 = \frac{0 \cdot (x-1) - 8 \cdot 1}{(x-1)^2} + 2 = \boxed{-\frac{8}{(x-1)^2} + 2 = 0}$$

$$\rightarrow -\frac{8}{(x-1)^2} + 2 = 0 \xrightarrow{(x-1)^2} -8 + 2(x-1)^2 = 0 \rightarrow 2(x-1)^2 = 8 \xrightarrow{:2} (x-1)^2 = 4$$

$$\rightarrow x^2 - 2x + 1 = 4 \rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$\rightarrow x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} =$$

$$x_1 = -1$$

נתון כי נקודה A
נמצאת ברביע הראשון

$$0 < x_A = x_A$$

$$x_2 = 3$$

שלב ד' - $y''(x) = 0$

$$y' = \frac{-8}{(x-1)^2} + 2$$

$$y'' = \frac{\overbrace{(-8)'}^0 (x-1)^2 - (-8) \overbrace{((x-1)^2)'}^{2(x-1)}}{((x-1)^2)^2} = \frac{0 \cdot (x-1)^2 + 8 \cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{16(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{16}{(x-1)^3}$$

$$y''(3) = \frac{16}{(3-1)^3} = \frac{16}{2^3} = \frac{16}{8} = 2 > 0 \rightarrow \min$$

שלב ה' - נשיב על המתבקש

שיעורי הנקודה A שבעבורה היקף המלבן הוא מינימלי:

$$\underline{x=3}: A\left(x, \frac{4}{x-1} + 3\right) \rightarrow A\left(3, \frac{4}{3-1} + 3\right) \rightarrow \boxed{A(3, 5)}$$

תשובה סופית סעיף ב'

סעיף ג'

$$AB = \frac{4}{x-1}, AD = x-1: \text{מצאנו בסעיף א':}$$

נחשב את שטח המלבן

$$S_{ABCD} = \frac{AB}{\frac{4}{x-1}} \cdot \frac{AD}{x-1} = \frac{4}{x-1} \cdot (x-1) = \boxed{4 \text{ יח"ר}}$$

תשובה סופית סעיף ג'