

שאלה 2 מתוך בגרות קיץ 2015 (בגרות במתמטיקה 4 יחידות)

נתון כי מעגל, שמשוואתו $(x-3)^2 + (y+k)^2 = 25$, עובר דרך ראשית הצירים.

k הוא פרמטר.

- א. (1) מצא את שני הערכים של k.
- (2) רשום את המשוואות של שני המעגלים המתאימים לערכים של k שמצאת.
- ב. מצא את נקודות החיתוך עם הצירים של כל אחד משני המעגלים.
- ג. סרטט את שני המעגלים במערכת צירים אחת.
- ד. הישר $x=a$ משיק לשני המעגלים, $a>0$.
- (1) מצא את a.
- (2) מה הם השיעורים של נקודות ההשקה?

פתרון: א1. $k = \pm 4$ א2. $(x-3)^2 + (y+4)^2 = 25$, $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$

ב. $(6,0), (0,-8), (0,0)$; $(6,0), (0,8), (0,0)$

ג. סקיצה ד1. $a=8$ ד2. $(8,-4), (8,4)$

פתרון מלא:

סעיף א' (1)

נתון כי המעגל $(x-3)^2 + (y+k)^2 = 25$ עובר דרך ראשית הצירים.

נציב את הנקודה $(0,0)$ במשוואת המעגל:

$$(x-3)^2 + (y+k)^2 = 25 \rightarrow (0-3)^2 + (0+k)^2 = 25 \rightarrow 9 + k^2 = 25$$

$$\rightarrow k^2 = 16 \rightarrow k = \pm 4$$

תשובה סופית סעיף א' (1)

סעיף א' (2)

נציב את ערכי k שמצאנו במשוואת המעגל:

אפשרות 1:

$$k = 4: (x-3)^2 + (y+4)^2 = 25$$

אפשרות 2:

$$k = -4: (x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$$

תשובה סופית סעיף א' (2)

סעיף ב'

נמצא את נקודות החיתוך עם הצירים של שני המעגלים:

נמצא את נקודות החיתוך של המעגל $(x-3)^2 + (y+4)^2 = 25$ עם הצירים:

נמצא את נקודות החיתוך עם ציר ה-x (נציב $y=0$):

$$y=0: (x-3)^2 + (0+4)^2 = 25 \rightarrow (x-3)^2 + 16 = 25 \rightarrow x^2 - 6x + 9 + 16 = 25$$

$$\rightarrow x^2 - 6x = 0 \rightarrow x(x-6) = 0$$

$$\begin{array}{cc} \swarrow & \searrow \\ x=0 & x=6 \end{array}$$

כלומר: $(0,0), (6,0)$

נמצא את נקודות החיתוך עם ציר ה-y (נציב $x=0$):

$$x=0: (0-3)^2 + (y+4)^2 = 25 \rightarrow 9 + (y+4)^2 = 25 \rightarrow 9 + y^2 + 8y + 16 = 25$$

$$\rightarrow y^2 + 8y = 0 \rightarrow y(y+8) = 0$$

$$\begin{array}{cc} \swarrow & \searrow \\ y=0 & y=-8 \end{array}$$

כלומר: $(0,0), (0,-8)$

נמצא את נקודות החיתוך של המעגל $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$ עם הצירים:

נמצא את נקודות החיתוך עם ציר ה-x (נציב $y=0$):

$$y=0: (x-3)^2 + (0-4)^2 = 25 \rightarrow (x-3)^2 + 16 = 25 \rightarrow x^2 - 6x + 9 + 16 = 25$$

$$\rightarrow x^2 - 6x = 0 \rightarrow x(x-6) = 0$$

$$\begin{array}{cc} \swarrow & \searrow \\ x=0 & x=6 \end{array}$$

כלומר: $(0,0), (6,0)$

נמצא את נקודות החיתוך עם ציר ה-y (נציב $x=0$):

$$x=0: (0-3)^2 + (y-4)^2 = 25 \rightarrow 9 + (y-4)^2 = 25 \rightarrow 9 + y^2 - 8y + 16 = 25$$

$$\rightarrow y^2 - 8y = 0 \rightarrow y(y-8) = 0$$

$$\begin{array}{cc} \swarrow & \searrow \\ y=0 & y=8 \end{array}$$

כלומר: $(0,0), (0,8)$

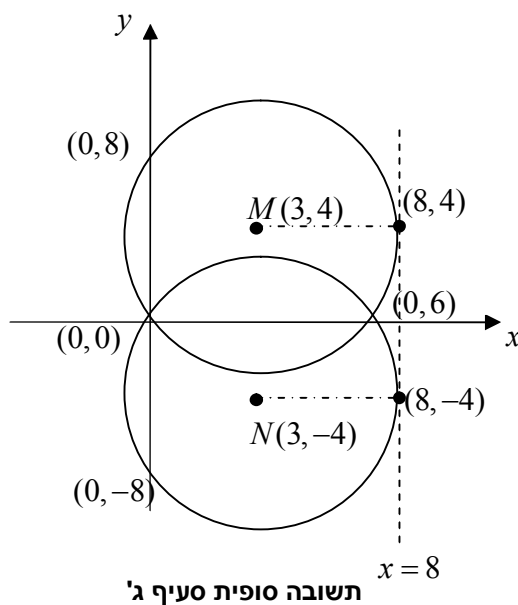
לסיכום:

נקודות החיתוך עם הצירים של המעגל הראשון: $(6,0), (0,-8), (0,0)$

נקודות החיתוך עם הצירים של המעגל השני: $(6,0), (0,8), (0,0)$

תשובה סופית סעיף ב'

סעיף ג'



סעיף ד' (1)

נוסיף לציור את מרכזי המעגל ונמצא את רדיוסיהם (על פי משוואותיהם של המעגלים):

$$(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25 \rightarrow \boxed{M(3,4), R=\sqrt{25}=5}$$

$$(x-3)^2 + (y+4)^2 = 25 \rightarrow \boxed{N(3,-4), R=\sqrt{25}=5}$$

כלומר, הנקודה הימנית ביותר בשני המעגלים היא 5 יחידות ימינה ממרכז המעגל (רדיוס המעגלים הם 5).

הישר $x=a$ הוא ישר המקביל לציר ה- y (מאונך לציר ה- x).
הישר המשיק לשני המעגלים הוא $x=8$, כלומר $a=8$ (נתון $a>0$).

תשובה סופית סעיף ד' (1)

סעיף ד' (2)

מצאנו בסעיף קודם את שיעור ה- x של נקודות ההשקה, $x=8$.
נציב במשוואות המעגלים ונמצא את שיעורי ה- y :

$$x=8: (8-3)^2 + (y-4)^2 = 25 \rightarrow 25 + (y-4)^2 = 25 \rightarrow (y-4)^2 = 0 \rightarrow \boxed{y=4}$$

$$x=8: (8-3)^2 + (y+4)^2 = 25 \rightarrow 25 + (y+4)^2 = 25 \rightarrow (y+4)^2 = 0 \rightarrow \boxed{y=-4}$$

כלומר, שיעורי נקודות ההשקה הם: $\boxed{(8,4), (8,-4)}$

תשובה סופית סעיף ד' (2)

Melumad