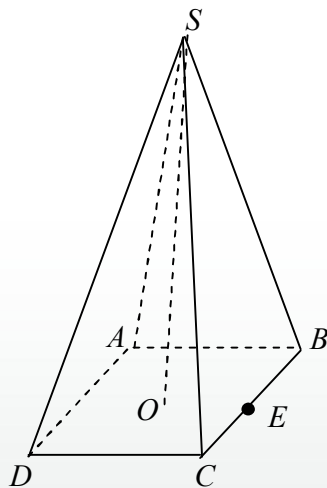


**שאלה 2 מתוך בגרות חורף 2014 (בגרות במתמטיקה 4 יחידות)**



נתונה פירמידה ישרה SABCD שבסיסה ריבוע וגובהה SO.

הנקודה E היא אמצע הצלע BC (ראה ציור).

הזווית בין SE לבסיס הפירמידה היא  $75^\circ$ .

אורך צלע הבסיס הוא a.

א. (1) הבע באמצע a את האורך של SE.

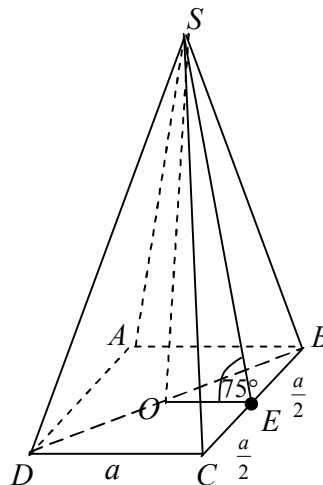
(2) הבע באמצעות a את שטח המעטפת של הפירמידה SABCD.

ב. הנקודה F נמצאת על הגובה SO כך ש-  $FO = \frac{1}{3}SO$ .

בפירמידה הישרה FABCD חשב את הזווית בין מקצוע צדדי לבסיס.

**פתרון:** א.  $SE = 1.93a$     ב.  $\alpha = 41.34^\circ$   
א. שטח מעטפת  $= 3.86a^2$

**פתרון מלא:**



נעבור על הנתונים ונפרש אותם.  
בהתאם נעדכן את הציור שלמעלה

נתון "פירמידה ישרה"

**נסיק:**

$AS=BS=CS=DS$  (בפירמידה ישרה המקצועות הצדדיים שווים זה לזה).

כלומר: משולשים ASD, ASB, BSC ו- CSD הם:

משולשים שווי שוקיים (משולש בעל שתי צלעות שוות הוא משולש שווה שוקיים)

משולשים חופפים זה לזה (בפירמידה ישרה שבסיסה ריבוע הפאות חופפות זו לזו).

נתון "פירמידה ישרה שבסיסה ABCD הוא ריבוע.

אורך צלע הבסיס הוא a"

**נסיק ונסמן:**

$AB = BC = CD = AD = a$  (צלעות בריבוע שוות זו לזו)

נתון "גובה הפירמידה הוא SO"  $\angle ABC = \angle BCD = \angle CDA = \angle DAB = 90^\circ$  (כל הזוויות בריבוע הן בנות 90 מעלות)

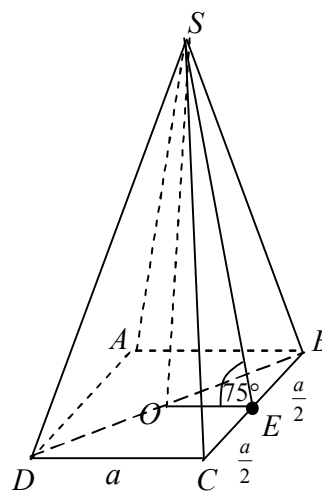
נסיק: נתון "גובה הפירמידה הוא SO"

נקודה O היא מרכז המעגל החוסם את הריבוע ונקודת מפגש האלכסונים בריבוע (בפירמידה ישרה, גובה הפירמידה עובר דרך מרכז המעגל החוסם את הבסיס, ומרכז המעגל החוסם את הבסיס יהיה מפגש אלכסוני).  
כלומר: הנקודה O תהיה אמצע אלכסון AC ואמצע האלכסון BD

## סעיף א' (1)

### בנה בניית עזר –

אלכסון ריבוע – נחבר את הנקודות B ו-D.



### נשים לב:

נקודת מרכז המעגל שחוסם את הריבוע היא גם הנקודה של מפגש אלכסוני הריבוע.  
נקודת המפגש של האלכסונים בריבוע חוצה את האלכסונים בריבוע לשני חלקים שווים, כלומר, הנקודה O היא אמצע BD.

נתבונן במשולש BCD:

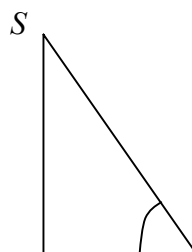
O אמצע BD (הוכחנו)

E אמצע BC (נתון).

OF קטע המחבר אמצעים במשולש BCD (קטע המחבר אמצעי 2 צלעות הוא קטע אמצעים), ולכן:

$$OE = \frac{1}{2} \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot a = \boxed{\frac{a}{2}} \quad (\text{קטע אמצעים שווה למחצית מצלע שלישית שלה הוא מקביל})$$

נתמקד במשולש SOE ונמצא את צלע SE (על ידי הגדרת הקוסינוס)



$$\cos \underbrace{\angle SEO}_{75^\circ} = \frac{\frac{a}{2}}{SE} \rightarrow \overbrace{\cos 75^\circ}^{0.2588} = \frac{\frac{a}{2}}{SE} \rightarrow SE \cdot 0.2588 = \frac{a}{2} \xrightarrow{:0.2588} \boxed{SE = 1.93a}$$

תשובה סופית סעיף א'

## סעיף א'(2)

הפאות בפירמידה ישרה הן משולשים שווים שוקיים, כלומר:

משו"ש  $\triangle SCB$

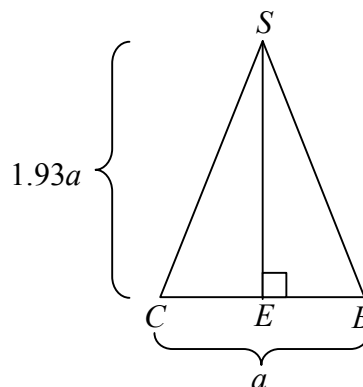
נתון כי E היא אמצע BC, כלומר:

SE תיכון ל-BC



(תיכון במשו"ש הוא גם גובה וחוצה זווית הראש)  
 $SE \perp BC$

נתבונן במשולש SCB ונחשב את שטחו:



$$S_{\triangle SCB} = \frac{SE \cdot BC}{2} = \frac{1.93a^2}{2} = \boxed{0.966a^2}$$

הפאות בפירמידה ישרה הן משולשים שווים שוקיים החופפים זה לזה, כלומר:

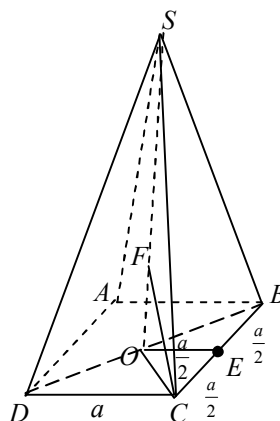
$$S_{\triangle SCB} = S_{\triangle SCD} = S_{\triangle SAD} = S_{\triangle SAB} = 0.966a^2$$

נחשב את שטח המעטפת של הפירמידה:

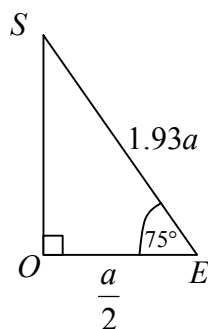
$$S = S_{\triangle SCB} + S_{\triangle SCD} + S_{\triangle SAD} + S_{\triangle SAB} = 0.966a^2 \cdot 4 = \boxed{3.86a^2}$$

תשובה סופית סעיף א'(2)

## סעיף ב'



נתמקד במשולש SOE ונמצא את צלע SO (על ידי הגדרת הגדרת הסינוס)



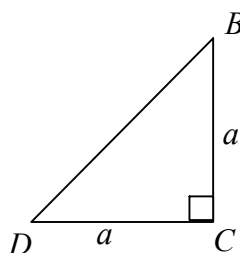
$$\sin \underbrace{\angle SEO}_{75^\circ} = \frac{SO}{SE} \rightarrow \sin 75^\circ = \frac{SO}{1.93a} \rightarrow 0.966 = \frac{SO}{1.93a} \xrightarrow{\cdot 1.93a} \boxed{SO = 1.866a}$$

מצאנו כי  $SO = 1.86a$

נתון כי  $FO = \frac{1}{3}SO$ , כלומר:

$$FO = \frac{1}{3}SO = \frac{1}{3} \cdot 1.86a = \boxed{0.622a}$$

נתמקד במשולש BCD, ונמצא את צלע BD (על ידי משפט פיתגורס)

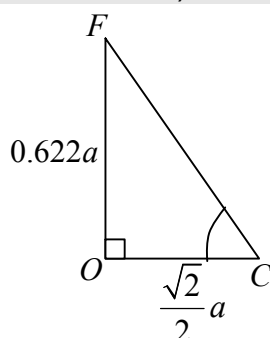


$$BD^2 = a^2 + a^2 \rightarrow BD^2 = 2a^2 \xrightarrow{\sqrt{\phantom{x}}} \boxed{BD = \sqrt{2}a}$$

נקודה O היא אמצע צלע BD (הוכחנו), כלומר:

$$BO = CO = \frac{BD}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}a = \boxed{0.707a}$$

נתמקד במשולש FOE ונמצא את זווית FCO (על ידי הגדרת הגדרת הטנגנס)



$$\tan \angle FCO = \frac{FO}{CO} \rightarrow \tan \angle FCO = \frac{0.622a}{0.707a} = 0.879 \xrightarrow{\text{shift tan}} \boxed{\angle FCO = 41.34^\circ}$$

תשובה סופית סעיף ב'