

סיכום חומר גיאומטריה במעגל

הגדרה: המקום הגיאומטרי של כל הנקודות הנמצאות במרחק קבוע מנקודה קבועה (המרכז) נקרא מעגל.

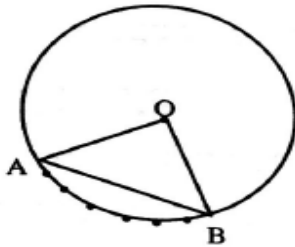
מושגים:

רדיוס – קטע המחבר נקודה כלשהי על המעגל

עם מרכז המעגל (OB, OA)

מיתר – קטע המחבר שתי נקודות על המעגל (AB)

קשת – חלק המעגל המוגבל בין שתי נקודות על המעגל.



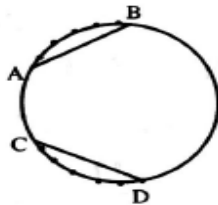
סימון: הקשת המוגבלת בין הנקודות A ו-B תסומן $\widehat{AB}$

זווית מרכזית – זווית שקדקודה במרכז המעגל ושוקיה רדיוסים נקראת זווית מרכזית ($\angle AOB$ בשרטוט).

מיתרים וקשתות במעגל

למיתרים שווים מתאימות קשתות שוות ולהיפך

(אם $AB = CD$ אז $\widehat{AB} = \widehat{CD}$ ולהיפך).



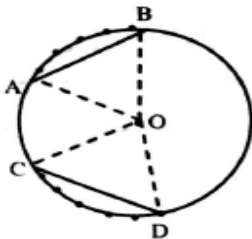
מיתרים, קשתות וזוויות מרכזיות

(1) לזוויות מרכזיות שוות מתאימות קשתות שוות ולהיפך

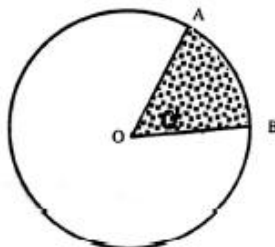
(אם $\angle AOB = \angle COD$ אז $\widehat{AB} = \widehat{CD}$, ולהיפך).

(2) לזוויות מרכזיות שוות מתאימים מיתרים שווים ולהיפך

(אם $\angle AOB = \angle COD$ אז $AB = CD$, ולהיפך).



שטח עיגול שרדיוסו R : $S = \pi R^2$.



שטח גיזרה המתאימה לזווית מרכזית α

במעגל שרדיוסו R : $S = \frac{\pi R^2 \cdot \alpha}{360^\circ}$

היקף מעגל שרדיוסו R : $2\pi R$.

אורך הקשת $\widehat{AB}$ המתאימה לזווית מרכזית α במעגל שרדיוסו R : $\frac{2\pi R \cdot \alpha}{360^\circ}$

אנך מהמרכז למיתר

(1) אנך מהמרכז למיתר חוצה את המיתר ואת הקשת המתאימה לו

(אם $OE \perp AB$ אז: $AE = EB$ ו- $\widehat{AF} = \widehat{FB}$).

(2) קטע המחבר את מרכז המעגל עם אמצע המיתר מאונך

למיתר (אם $AE = EB$ אז $OE \perp AB$).

מיתרים ומרחקיהם ממרכז המעגל

(1) מיתרים שווים במעגל נמצאים במרחקים שווים ממרכז המעגל

(אם $OE = OF$, $OE \perp AB$, $OF \perp CD$, $AB = CD$).

(2) מיתרים במעגל הנמצאים במרחקים שווים ממרכז המעגל שווים

זה לזה (אם $OE = OF$, $OE \perp AB$, $OF \perp CD$,

אז $AB = CD$).

(3) אם מיתר אחד במעגל גדול יותר ממיתר שני, אז מרחקו של המיתר

הגדול ממרכז המעגל קטן יותר ממרחקו של המיתר הקטן ממרכז

המעגל (אם $OE < OF$, $OE \perp AB$, $OF \perp CD$, $AB > CD$).

(4) אם מרחקו של מיתר אחד ממרכז המעגל קטן ממרחקו של מיתר שני

ממרכז המעגל, אז המיתר האחד גדול מן המיתר השני

(אם $OE < OF$, $OE \perp AB$, $OF \perp CD$, אז $AB > CD$).

זווית היקפית במעגל

הגדרה: זווית שקדקודה על היקף המעגל ושוקיה מיתרים

במעגל, נקראת זווית היקפית.

תכונות:

(1) זווית מרכזית גדולה פי 2 מן הזווית ההיקפית

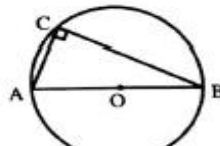
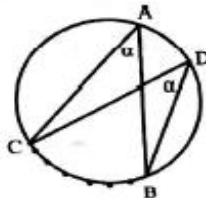
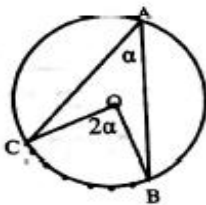
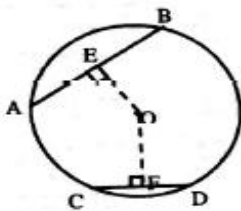
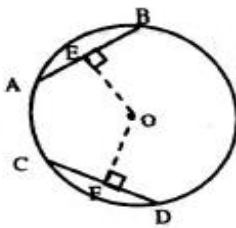
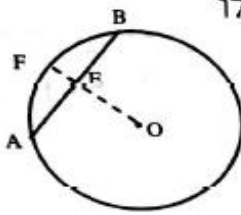
הנשענת על אותה קשת. ($\angle BOC = 2\angle BAC$).

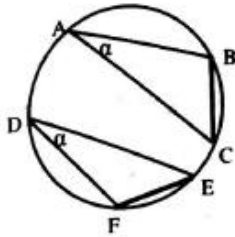
(2) זוויות היקפיות הנשענות על אותה קשת, שוות זו לזו.

($\angle BAC = \angle BDC$).

(3) זווית היקפית הנשענת על קוטר היא

זווית ישרה. ($\angle ACB = 90^\circ$).





(3) זוויות היקפיות שוות נשענות על מיתרים שווים
(אם $\angle A = \angle D$ אז $BC = EF$).

(5) על מיתרים שווים נשענות זוויות היקפיות שוות
(אם $BC = EF$ אז $\angle A = \angle D$).

זווית פנימית

הגדרה:

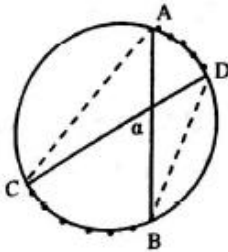
זווית הנוצרת בין שני מיתרים הנחתכים בתוך המעגל נקראת זווית פנימית במעגל.

תכונה:

זווית פנימית במעגל שווה למחצית סכום שתי הקשתות

$$\alpha = \frac{\widehat{AD} + \widehat{BC}}{2}$$

הכלואות בין שוקי הזוויות והמשכיהן:



זווית חיצונית

הגדרה:

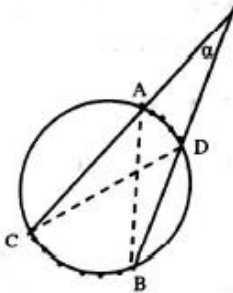
זווית הנוצרת בין המשכי שני מיתרים הנפגשים מחוץ למעגל נקראת זווית חיצונית למעגל.

תכונה:

זווית חיצונית למעגל שווה למחצית ההפרש שבין שתי

$$\alpha = \frac{\widehat{BC} - \widehat{AD}}{2}$$

הקשתות הכלואות בין שוקי הזווית:



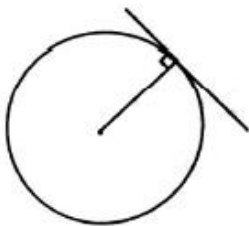
משיק למעגל

הגדרה: ישר הנוגע במעגל בנקודה אחת (נקודת ההשקה) נקרא משיק למעגל.

תכונות:

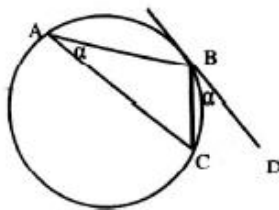
(1) משיק למעגל מאונך לרדיוס בנקודת ההשקה.

(2) ישר המאונך לרדיוס בקצהו, משיק למעגל.



(3) (*) זווית בין משיק למיתר שווה לזווית ההיקפית הנשענת על המיתר מצידו השני

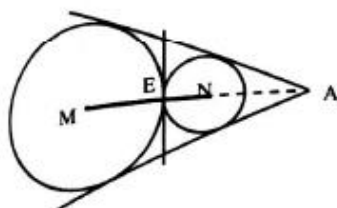
$$(\angle BAC = \angle DBC)$$



- (3) לשני מעגלים נחתכים יש שני משיקים משותפים.
 אם $R_1 \neq R_2$ אז המשיקים נפגשים בנקודה הנמצאת על המשך קטע המרכזים;
 אם $R_1 = R_2$ המשיקים מקבילים זה לזה.

ב. מעגלים משיקים מבחוץ

הגדרה: שני מעגלים שיש להם נקודה אחת משותפת ומעגל אחד נמצא מחוץ למעגל השני, נקראים מעגלים משיקים מבחוץ.

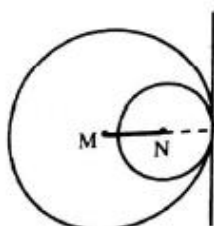


תכונות:

- נקודת ההשקה של שני מעגלים משיקים מבחוץ נמצאת על קטע המרכזים MN.
- קטע המרכזים MN מקיים: $MN = R_1 + R_2$ (הרדיוסים של המעגלים).
- לשני מעגלים משיקים מבחוץ יש שלושה משיקים משותפים.
- אם $R_1 \neq R_2$, אז שני המשיקים שאינם עוברים דרך נקודת ההשקה נפגשים על המשך קטע המרכזים MN.

ג. מעגלים משיקים מבפנים

הגדרה: שני מעגלים שיש להם נקודה אחת משותפת ומעגל אחד נמצא בתוך המעגל השני, נקראים מעגלים משיקים מבפנים.



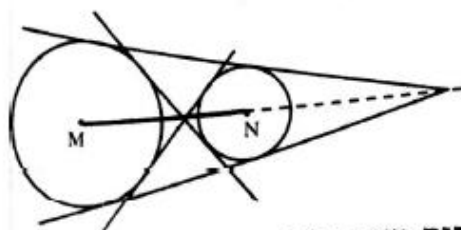
תכונות:

- נקודת ההשקה של שני מעגלים משיקים מבפנים נמצאת על המשך קטע המרכזים MN.
- קטע המרכזים מקיים: $MN = |R_1 - R_2|$.
- לשני מעגלים משיקים מבפנים יש משיק משותף אחד.

ד. מעגלים זרים

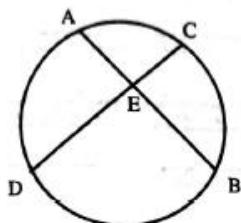
הגדרה: שני מעגלים שאין להם נקודה משותפת.

תכונות:

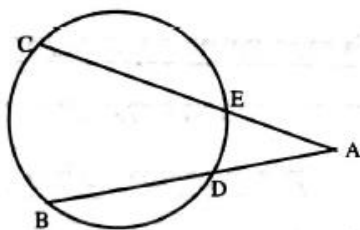


- כאשר מעגל אחד נמצא מחוץ למעגל השני מתקיים:
 - $MN > R_1 + R_2$ 2. למעגלים יש 4 משיקים משותפים.
- כאשר מעגל אחד נמצא בתוך המעגל השני מתקיים:
 - $MN < |R_1 - R_2|$ 2. למעגלים אין משיקים משותפים.

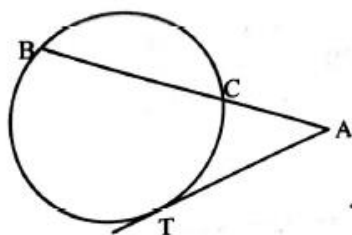
פרופורציה במעגל



1. שני מיתרים הנחתכים בתוך המעגל מחלקים זה את זה לשני קטעים, כך שמכפלת הקטעים של מיתר אחד שווה למכפלת הקטעים של המיתר השני.
(אם AB ו-CD שני מיתרים במעגל הנחתכים בנקודה E אז מתקיים : $AE \cdot EB = CE \cdot ED$).



2. שני חותכים היוצאים מאותה נקודה למעגל מקיימים: מכפלת חותך אחד בחלקו החיצוני שווה למכפלת החותך השני בחלקו החיצוני (אם A נקודה ממנה יוצאים שני חותכים AB ו-AC החותכים את המעגל גם בנקודות D ו-E בהתאמה (ראה שרטוט) , אז מתקיים : $AB \cdot AD = AC \cdot AE$).



3. משיק וחותך היוצאים מאותה נקודה למעגל מקיימים: מכפלת החותך בחלקו החיצוני שווה לריבוע אורך המשיק (אם AB חותך מעגל בנקודה נוספת C ו-AT משיק לאותו מעגל בנקודה T אז מתקיים : $AT^2 = AB \cdot AC$).