

שאלה 7 מתוך חורף 2019 (שאלון 804 בגרות במתמטיקה 4 יחידות)

הפונקציה $f(x)$ מוגדרת לכל $x \neq 0$.

בציור שלפניך מתואר הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$, המוגדרת גם היא לכל $x \neq 0$,

וחותכת את ציר ה- x בנקודות $(-2, 0)$, $(2, 0)$.

א. מצא את שיעורי ה- x של נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן על פי הגרף.

נתון: $f'(x) = -\frac{1}{x^2} + a$ לכל $x \neq 0$. $a > 0$ הוא פרמטר.

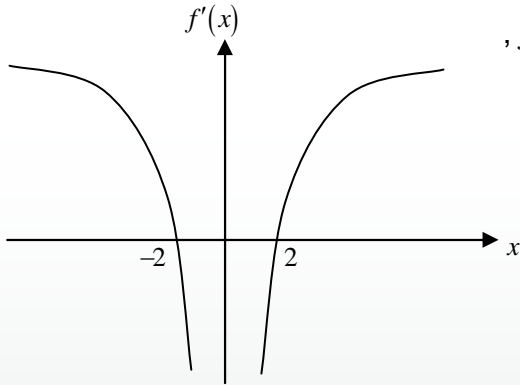
ב. מצא את a .

ענה על סעיף ג בעבור $x > 0$.

שיעור ה- y של נקודת המינימום של הפונקציה $f(x)$ הוא 10.

ג. (1) כתוב ביטוי אלגברי לפונקציה $f(x)$.

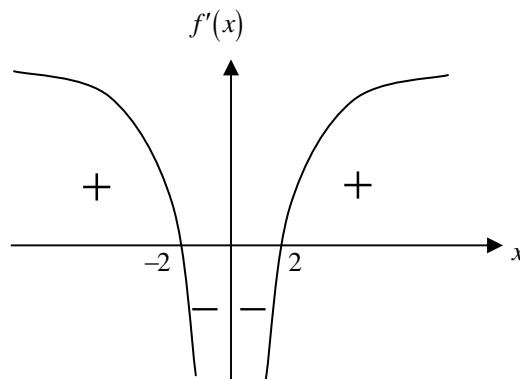
(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ בעבור $x > 0$.



פתרון: א. $x_{\max} = -2$, $x_{\min} = 2$. ב. $a = \frac{1}{4}$. ג(1). $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{x}{4} + 9$. ג(2). סקיצה

פתרון מלא:

סעיף א'



מציאת נקודות קיצון (שיעור x בלבד)

שלב א' - $f'(x) = 0$

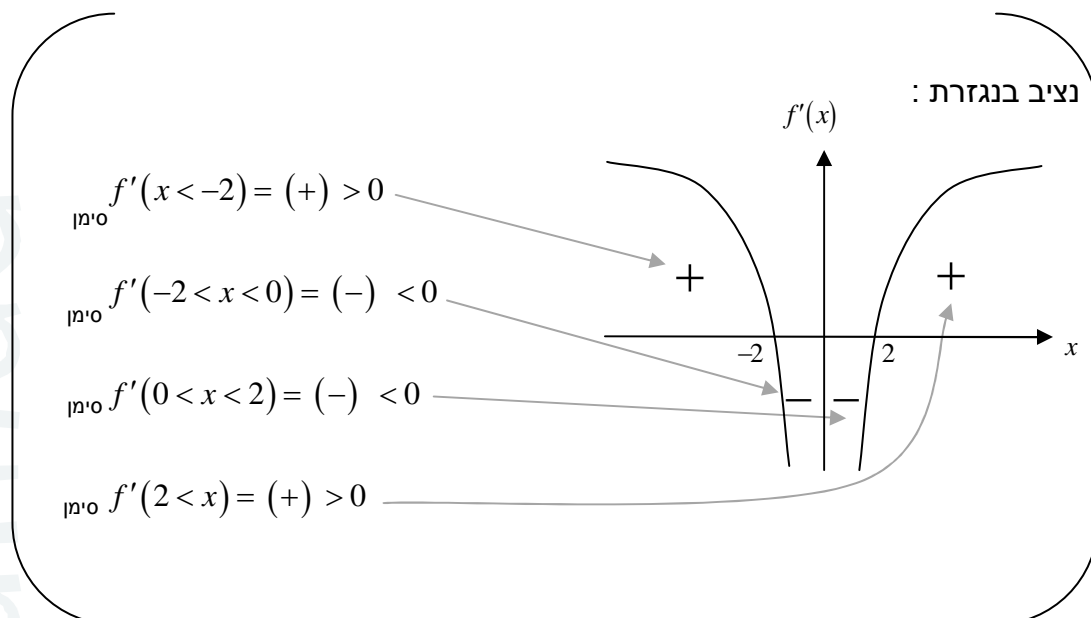
נמצא את נקודות ההתאפסות של הנגזרת הראשונה על סמך הציור של הנגזרת

$$f'(x) = 0 \rightarrow \boxed{x = 2, x = -2}$$

שלב ב' - טבלה

נבנה טבלה המקשרת בין הנגזרת $f'(x)$ לפונקציה $f(x)$:

x		$x = -2$		$x = 0$		$x = 2$	
$f'(x)$ שלב 1- נסיק מהציור	(+)		(-)		(-)		(+)
$f(x)$ שלב 2- נסיק	$\nearrow$	max	$\searrow$		$\searrow$	min	$\nearrow$



ועל כן נסיק ששיעורי ה- x של נקודות הקיצון הם: $x_{\max} = -2, x_{\min} = 2$

תשובה סופית סעיף א'



סעיף ב'

עלינו למצוא את a
נבנה משוואה אחת עם משתנה אחד

מצד אחד:

לפי גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$ נסיק:

$$f'(2) = 0$$

מצד שני:

נתון $f'(x) = -\frac{1}{x^2} + a$, נציב $x = 2$:

$$f'(2) = -\frac{1}{2^2} + a = -\frac{1}{4} + a$$

נשווה בין שני הערכים:

$$-\frac{1}{4} + a = 0 \rightarrow \boxed{a = \frac{1}{4}}$$

תשובה סופית סעיף ב'

סעיף ג'(1)

נציב $a = \frac{1}{4}$ בפונקציית הנגזרת:

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + a \rightarrow \boxed{f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{4}}$$

עלינו למצוא ביטוי אלגברי ל- $f(x)$
כלומר עלינו למצוא את הפונקציה $f(x)$

שלב א' – נציב בנוסחה $f(x) = \int f'(x)dx$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{4}$$

$$f(x) = \int f'(x)dx = \int \left(-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{4} \right) dx = \int \left(-x^{-2} + \frac{1}{4} \right) dx = -\frac{x^{-1}}{-1} + \frac{1}{4}x + C = \boxed{\frac{1}{x} + \frac{1}{4}x + C}$$

עלינו למצוא
את C

שלב ב' – כדי למצוא את C עלינו לבנות משוואה

נתון: שיעור ה- y של נקודת המינימום של הפונקציה $f(x)$ הוא 10 לכן נקודת המינימום של הפונקציה היא: $(2,10)_{\min}$.

נקודת המינימום של הפונקציה $f(x)$ נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$, נציב את שיעורי הנקודה $(2,10)_{\min}$ בפונקציה $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{4}x + C$:

$$(2,10): f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{4}x + C \rightarrow 10 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot 2 + C \rightarrow 10 = 1 + C \rightarrow \boxed{C=9}$$

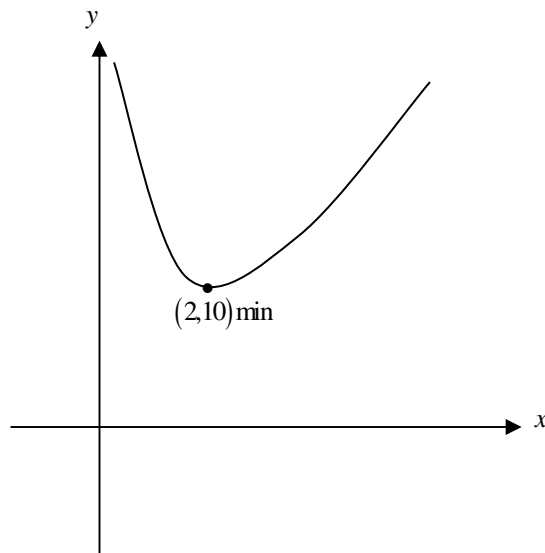
לכן הפונקציה $f(x)$ היא:

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{4}x + C \xrightarrow{C=9} \boxed{f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{4}x + 9}$$

תשובה סופית סעיף ג'(1)

סעיף ג'(2)

נצייר סקיצה של הפונקציה $f(x)$



תשובה סופית סעיף ג'(2)