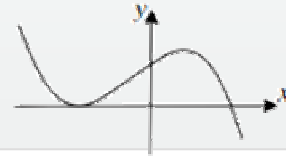


שאלה 7 מתוך קיץ 2019 (שאלון 481 בגרות במתמטיקה 4 יחידות)

נתונה הפונקציה $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 9x + a$, המוגדרת לכל x , a הוא פרמטר.

- מצא את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- y (אם יש צורך, הבע באמצעות a)
- מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ (אם יש צורך, הבא באמצעות a), וקבע את סוגן.
- מצא את הערך של a שבעבורו נקודת המינימום של הפונקציה $f(x)$ נמצאת על ציר ה- x , נמק.
- הצב $a=18$ במשוואת הפונקציה $f(x)$, וענה על הסעיפים ד-ו.
- רשום את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
- (1) חשב את השטח ברביע השני המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, ציר ה- x וציר ה- y .
- (2) A היא נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- y , ו- B היא נקודת המינימום של הפונקציה $f(x)$.
- הראה שגרף הפונקציה $f(x)$ מחלק את המשולש ABO לשני שטחים שהיחס ביניהם הוא 1:3 (O- ראשית הצירים).

פתרון: א. $(0, a)$ ב. $\min(-3, a-18)$, $\max(3, a+18)$ ג. 18 ד. $\min(-3, 0)$, $\max(3, 36)$ ה. 1. 20.25 יח"ר 2. הוכחה



פתרון מלא:

סעיף א'

מציאת נקודות חיתוך עם ציר ה- y (נציב $x=0$)

$$x=0: f(0) = -\frac{1}{3} \cdot 0^3 + 9 \cdot 0 + a = a \rightarrow \boxed{(0, a)}$$

תשובה סופית סעיף א'

סעיף ב'

מציאת נקודות קיצון

שלב 1- נגזור ונשווה את הנגזרת לאפס:

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 9x + a$$

$$f'(x) = \boxed{-x^2 + 9 = 0} \rightarrow x^2 = 9 \rightarrow \boxed{x = \pm 3}$$

שלב 2- טבלה

נציב את נקודת התאפסות הנגזרת $x=3$.

	$x = -4$		$x = 0$		$x = 5$
	↓		↓		↓
x		$x = -3$		$x = 3$	
$f'(x)$	(-)		(+)		(-)
$f(x)$	↘	min	↗	max	↘

נציב בנגזרת:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -x^2 + 9 \\ f'(-4) &= -(-4)^2 + 9 < 0 \\ f'(0) &= -0 + 9 > 0 \\ f'(5) &= -5^2 + 9 < 0 \end{aligned}$$



$$x_{\min} = -3, x_{\max} = 3$$

שלב ג' - נציב בפונקציה המקורית

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 9x + a$$

$$x_{\min} = -3: y = -\frac{1}{3}(-3)^3 + 9 \cdot (-3) + a = -\frac{1}{3} \cdot (-27) - 27 + a = -18 + a = a - 18 \rightarrow (-3, a - 18)_{\min}$$

$$x_{\max} = 3: y = -\frac{1}{3} \cdot 3^3 + 9 \cdot 3 + a = -\frac{1}{3} \cdot 27 + 27 + a = -9 + 27 + a = a + 18 \rightarrow (3, a + 18)_{\max}$$

תשובה סופית סעיף ב'

סעיף ג'

מצאנו בסעיף קודם כי נקודת המינימום היא

$$(-3, a - 18)_{\min}$$

על מנת שנקודת המינימום תהיה על ציר ה- x , שיעור ה- y שלה צריך להיות 0, ולכן:

$$a - 18 = 0 \rightarrow a = 18$$

תשובה סופית סעיף ג'

סעיף ד'

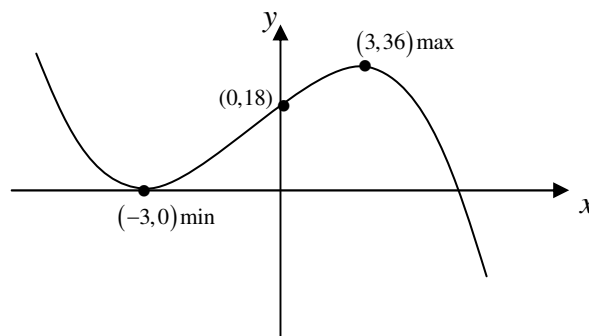
נציב את $a=18$ בנקודות הקיצון שמצאנו:

$$(-3, a-18) \xrightarrow{a=18} \boxed{(-3, 0) \min}$$

$$(3, a+18) \xrightarrow{a=18} \boxed{(3, 36) \max}$$

תשובה סופית סעיף ד'

סעיף ה'

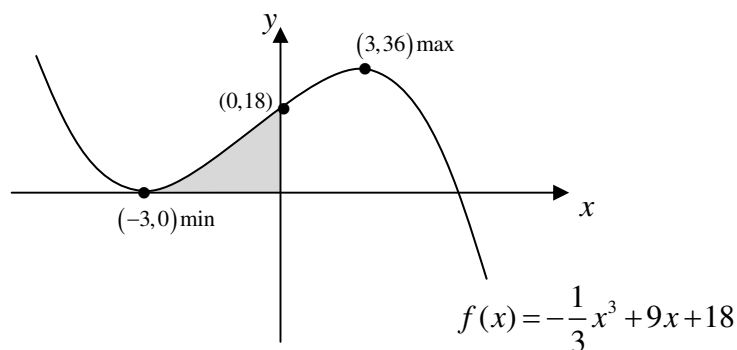


מציאת נקודות חיתוך עם ציר ה- y (נציב $x=0$)

$$(0, a) \xrightarrow{a=18} (0, 18)$$

תשובה סופית סעיף ה'

סעיף ו' (1)

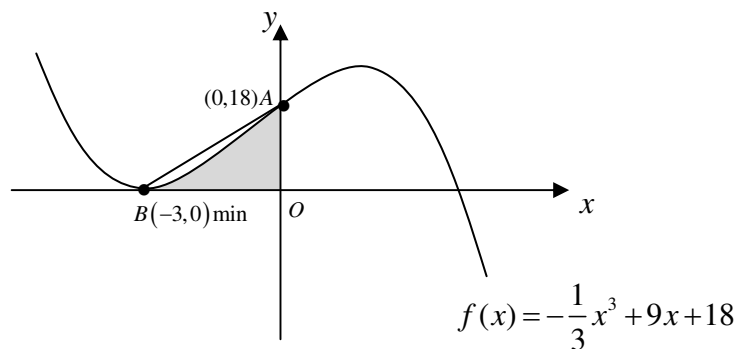


נחשב את השטח ברביע השני המוגבל על ידי גרף הפונקציה והצירים (השטח האפור)

$$\begin{aligned}
 S &= \int_{-3}^0 \left[-\frac{1}{3}x^3 + 9x + 18 \right] dx = \left[-\frac{1}{3} \cdot \frac{x^4}{4} + 9 \cdot \frac{x^2}{2} + 18x \right]_{-3}^0 = \left[-\frac{x^4}{12} + 4.5x^2 + 18x \right]_{-3}^0 \\
 &= \underbrace{\left[-\frac{0}{12} + 0 + 0 \right]}_{x=0} - \underbrace{\left[-\frac{(-3)^4}{12} + 4.5 \cdot (-3)^2 + 18 \cdot (-3) \right]}_{x=-3} = 0 - [-6.75 + 40.5 - 54] \\
 &= 0 - [-20.25] = \boxed{20.25}
 \end{aligned}$$

תשובה סופית סעיף ו' (1)

סעיף ו' (1)



נחשב את שטח המשולש ABO:

$$S_{\triangle ABO} = \frac{AO \cdot BO}{2} = \frac{18 \cdot 3}{2} = 27$$

נמצא את היחס בין השטח האפור (שמצאנו בסעיף קודם) לשטח המשולש:

$$\frac{20.25}{27} = 0.75$$

כלומר, השטח הלבן מהווה 0.25 משטח המשולש (משלים ל-1).
כלומר, היחס בין שני השטחים הוא:

$$\frac{0.25}{0.75} = \frac{1}{3}$$

תשובה סופית סעיף ו' (2)