

שאלה 5 מתוך קיץ 2019 (שאלון 482 בגרות במתמטיקה 4 יחידות)

נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{1 + \ln x}{ax}$, $a > 0$ הוא פרמטר.

- מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
- מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).
- מצא את שיעור ה- x של נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$ וקבע את סוגה.
- רשום את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

נתון כי שיעור ה- y של נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$ הוא $\frac{1}{4}$.

ה. (1) מצא את a .

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה $g(x) = -f(x)$.

ו. רשום את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$ וקבע את סוגה. נמק את תשובתך.

פתרון: פתרון: א. $x > 0$ ב. $\left(\frac{1}{e}, 0\right)$ ג. $x=1$ מקסימום ד. עלייה: $0 < x < 1$ ירידה: $x > 1$

ה. 1. $a=4$ 2. $(1, -0.25) \min$



פתרון מלא:

סעיף א'

מציאת תחום הגדרה:

$$\begin{cases} \text{תוכן ה-} \ln & \rightarrow x > 0 > 0 \\ \text{וגם} & \\ \text{מכנה} \neq 0 & \rightarrow ax \neq 0 \rightarrow x \neq 0 \end{cases}$$

ולכן, תחום ההגדרה הוא $x > 0$

תשובה סופית סעיף א'

סעיף ב'

נמצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x .
נציב $y=0$:

$$y=0: 0 = \frac{1 + \ln x}{ax} \rightarrow 1 + \ln x = 0 \rightarrow \ln x = -1 \rightarrow x = e^{-1} = \frac{1}{e} \rightarrow \left(\frac{1}{e}, 0\right)$$

חלק מתשובה סופית סעיף ב'

נמצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- y .
נציב $x=0$:

$x=0$ לא בתחום ההגדרה

חלק מתשובה סופית סעיף ב'

סעיף ג'

מציאת נקודות קיצון

שלב 1- נגזור ונשווה את הנגזרת לאפס:

$$f(x) = \frac{1 + \ln x}{ax}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot ax - (1 + \ln x) \cdot a}{(ax)^2} = \frac{a - (1 + \ln x) \cdot a}{(ax)^2} = 0 \quad / \cdot (ax)^2$$

אין לפונקציה נקודת קיצון

$$a - (1 + \ln x) \cdot a = 0 \rightarrow a = (1 + \ln x) \cdot a \xrightarrow{:a} 1 = 1 + \ln x \rightarrow \ln x = 0 \rightarrow \boxed{x = e^0 = 1}$$

שלב 2- טבלה

	0	$x=0.5$	$x=2$	
x		$\downarrow$	$x=1$	$\downarrow$
$f'(x)$		(+)		(-)
$f(x)$		$\nearrow$	MAX	$\searrow$

נציב בנגזרת:

$$f'(x) = \frac{a - (1 + \ln x) \cdot a}{(ax)^2}$$

$$f'(0.5) = \frac{a - (1 + \ln 0.5) \cdot a}{+} = \frac{a - 0.3a}{+} = \frac{0.7a}{+} > 0$$

$$f'(2) = \frac{a - (1 + \ln 2) \cdot a}{+} = \frac{a - 1.69a}{+} = \frac{-0.69a}{+} < 0$$

$$\boxed{x_{\max} = 1}$$

תשובה סופית סעיף ג'

סעיף ד'

בעזרת הטבלה בסעיף קודם, נמצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה:

תחומי עלייה: $0 < x < 1$

תחומי ירידה: $x > 1$

תשובה סופית סעיף ד'

סעיף ה'(1)

מצד אחד, נמצא את שיעור ה- y של נקודת הקיצון. נציב את $x=1$ בפונקציה:

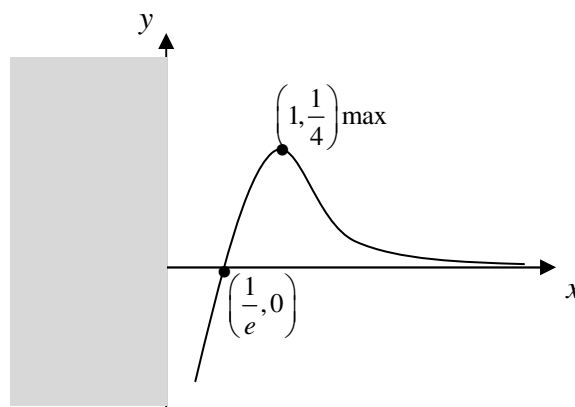
$$x=1: f(1) = \frac{1+\ln 1}{a \cdot 1} = \boxed{\frac{1}{a}}$$

מצד שני נתון כי שיעור ה- y של נקודת הקיצון הוא $\frac{1}{4}$. נשווה בין שני הגדלים ונמצא את a :

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{4} \rightarrow \boxed{a=4}$$

תשובה סופית סעיף ה'(1)

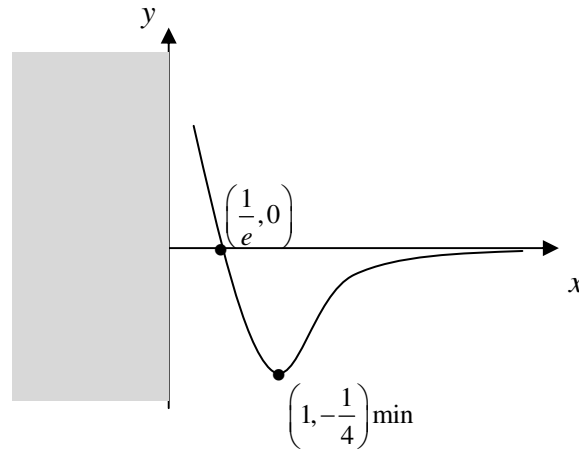
סעיף ה'(2)



תשובה סופית סעיף ה'(2)

סעיף ו'

נתונה הפונקציה $g(x) = -f(x)$,
כלומר כל שיעור x של פונקציה $g(x)$ הינו נגדי לשיעור ה- y של פונקציה $f(x)$.
ולכן הפונקציה נראית כך:



ולכן נקודת הקיצון הינה $\left(1, -\frac{1}{4}\right)_{\min}$.

דרך ב'-ניתן לדלג:

נתון כי $g(x) = -f(x)$, כלומר:

$$g(x) = -f(x) = -\frac{1 + \ln x}{4x}$$

מציאת נקודות קיצון

שלב 1- נגזור ונשווה את הנגזרת לאפס:

$$g(x) = -\frac{1 + \ln x}{4x}$$

$$f'(x) = -\frac{\overbrace{\frac{1}{x}}^{\text{אין פתרון.}} \cdot 4x - \overbrace{(1 + \ln x)}^{\text{היטוי מעריכי הוא תמיד חיובי}} \cdot (4x)}{(4x)^2} = -\frac{\cancel{\frac{1}{x}} \cdot 4 - (1 + \ln x) \cdot 4}{(4x)^2} = \boxed{-\frac{4 - (1 + \ln x) \cdot 4}{(4x)^2} = 0} \cdot (4x)^2$$

אין לפונקציה נקודת קיצון

$$-(4 - (1 + \ln x) \cdot 4) = 0 \rightarrow -4 + 4(1 + \ln x) = 0 \rightarrow 4(1 + \ln x) = 4 \xrightarrow{:4} 1 + \ln x = 1$$

$$\rightarrow \ln x = 0 \rightarrow \boxed{x = e^0 = 1}$$

שלב 2- טבלה

	0	$x = 0.5$		$x = 2$
x		↓	$x = 1$	↓
$f'(x)$		(-)		(+)
$f(x)$		↘	min	↗

נציב בנגזרת:

$$g'(x) = -\frac{4 - 4(1 + \ln x)}{\underbrace{(4x)^2}_+}$$

$$g'(0.5) < 0$$

$$g'(2) > 0$$

$$x_{\max} = 1$$

שלב 3 – נציב בפונקציה המקורית:

$$x = 1: g(1) = -\frac{1 + \ln 1}{4} = -\frac{1}{4} \rightarrow (1, -0.25)$$

תשובה סופית סעיף ו'