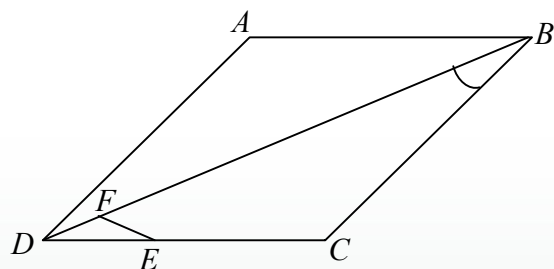


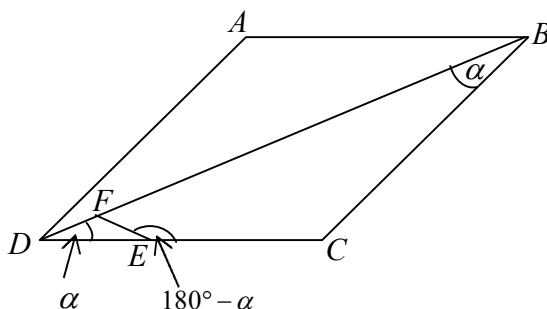
שאלה 4 מתוך קיץ 2017 מועד ב' (שאלון 804 בגרות במתמטיקה)



ABCD הוא מעוין.
הנקודה E נמצאת על הצלע DC והנקודה F נמצאת על האלכסון DB (ראה ציור). נתון כי המרובע BCEF הוא בר-חסימה במעגל.
א. (1) הוכח: $\angle FED = \angle CBD$.
(2) הוכח שהמשולש DFE הוא שווה שוקיים.
ב. הוכח: $\triangle DFE \sim \triangle DCB$.
ג. נתון: $DB = 3DE$, שטח המשולש DFE הוא 2 סמ"ר.
חשב את שטח המעוין ABCD.

פתרון: א.1. הוכחה א.2. הוכחה ב. הוכחה ג. 36 סמ"ר

פתרון מלא:



סעיף א' (1)

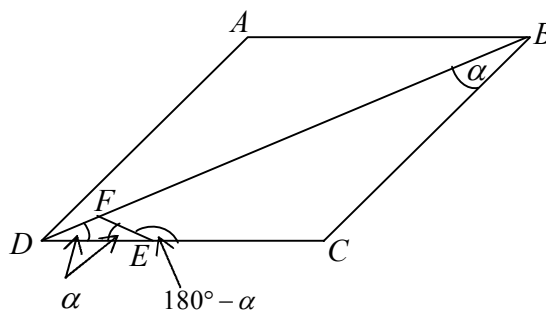
נימוק	טענה
נתון	ABCD מעוין
	↓
במעוין האלכסונים חוצים את הזוויות + זוויות נגדיות במעוין שוות זו לזו + סימון	$\angle CBD = \angle BDC = \alpha$
נתון	המרובע BCEF הוא בר-חסימה במעגל.
	↓
במרובע חסום במעגל סכום כל זוג זוויות נגדיות הוא 180 מעלות + הצבה	$\angle CEF + \underbrace{\angle FBC}_{\alpha} = 180^\circ$ $\rightarrow \angle CEF = 180^\circ - \alpha$
סכום זוויות צמודות 180 מעלות	$\angle FED + \underbrace{\angle CEF}_{180^\circ - \alpha} = 180^\circ$ $\rightarrow \angle FED + 180^\circ - \alpha = 180^\circ$ $\rightarrow \angle FED = \alpha$
	↓
כלל המעבר	$\angle FED = \angle CBD = \alpha$ מ.ש.ל סעיף א' (1)

סעיף א' (2)

נימוק	טענה
הוכחנו	$\angle BDC = \alpha$
	$\angle FED = \alpha$
	$\downarrow$
במעוין האלכסונים חוצים את הזוויות + סימון	$\angle FED = \angle BDC = \alpha$
	$\downarrow$
משולש בו שתי זוויות הבסיס שוות זו לזו הוא משולש שווה שוקיים	$\triangle DFE$ משולש שווה שוקיים מ.ש.ל סעיף א' (2)

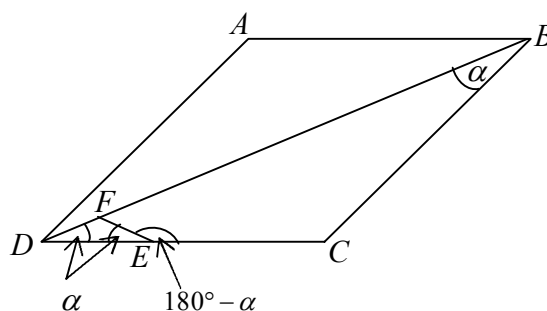
סעיף ב'

נוכיח דמיון בין המשולשים $\triangle DFE$ ו- $\triangle DCB$



נימוק	טענה
זווית משותפת לשני המשולשים	1. $\angle EDF = \angle BDC = \alpha$
הוכחנו + כלל המעבר	2. $\angle FED = \angle CBD = \alpha$
	1,2 $\downarrow$
משפט דמיון (ז,ז)	$\triangle DFE \sim \triangle DCB$ מ.ש.ל סעיף ב'

סעיף ג'



נמצא את שטח משולש S_{ABD}

נימוק	טענה
נתון	$S_{DEF} = 2$
נתון	$DB = 3DE$
הוכחנו	$\triangle DFE \sim \triangle DCB$
	↓
במשולשים דומים יחסי צלעות מתאימים בריבוע שווה ליחס שטחי המשולשים	$\left(\frac{DC}{DF}\right)^2 = \left(\frac{CB}{FE}\right)^2 = \left(\frac{DB}{DE}\right)^2 = \frac{S_{DBC}}{S_{DEF}}$ $\downarrow 3DE$ $\uparrow 2$
	↓
אלגברה	$\left(\frac{3DE}{DE}\right)^2 = \frac{S_{DBC}}{2} \rightarrow 3^2 = \frac{S_{DBC}}{2}$ $\rightarrow 9 = \frac{S_{DBC}}{2} \rightarrow \boxed{S_{DBC} = 18 \text{ סמ}^2}$

אלכסון המעוין מחלק את המעוין ל-2 משולשים שווים (שני משולשים חופפים ולכן הם שווים שטח),
כלומר שטח המעוין שווה לפעמיים שטח המשולש DBC ולכן:

$$S_{ABCD} = 2 \cdot \underbrace{S_{DBC}}_{18} = 2 \cdot 18 = 36 \rightarrow \boxed{S_{ABCD} = 36 \text{ סמ}^2}$$

תשובה סופית סעיף ג'