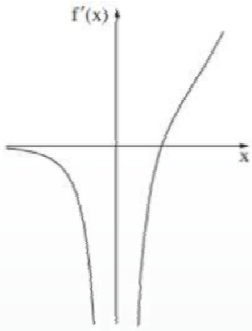


שאלה 5 מתוך קיץ 2020 (בגרות במתמטיקה 4 יחידות)

נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{ae^{2x}}{e^x - 1}$. a הוא פרמטר.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
הגרף שלפניך הוא הגרף של פונקציית הנגזרת, $f'(x)$, והוא חותך את ציר ה- x בנקודה שבה $x = \ln 2$.



ב. הסתמך על הגרף, קבע מהו שיעור ה- x של נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגה.

נתון: שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה $x = \ln 3$ הוא 9.
ג. מצא את a .

הצב $a=4$ וענה על הסעיפים ד-ה.

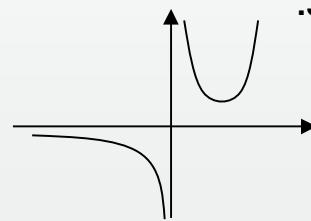
ד. (1) האם לגרף הפונקציה $f(x)$ יש נקודות חיתוך עם הצירים? נמק.

(2) מהי משוואת האסימפטוטה של הפונקציה $f(x)$ המאונכת לציר ה- x ?

(3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ה. בעבור אילו ערכי x גם הפונקציה $f(x)$ שלילית וגם הפונקציה $f'(x)$ שלילית?

פתרון: א. $x \neq 0$ ב. $x_{\min} = \ln 2$ ג. $a=4$ ד. אין ד.2. $x=0$
ה. $x < 0$



פתרון מלא:

סעיף א'

מציאת תחום הגדרה:

$$x \neq 0 \rightarrow e^x - 1 \neq 0 \rightarrow e^x \neq 1 \rightarrow \boxed{x \neq 0}$$

תשובה סופית סעיף א'

סעיף ב'

נתון כי גרף הנגזרת חותך את ציר ה- x בנקודה שבה $x = \ln 2$.

כלומר הנגזרת מתאפסת ב- $x = \ln 2$.

נמצא את הטבלה של נקודות הקיצון:

		$x=0$		$x = \ln 2$	
$f'(x)$	$(-)$		$(-)$		$(+)$
$f(x)$	$\searrow$		$\searrow$	min	$\nearrow$



$$x_{\min} = \ln 2$$

תשובה סופית סעיף ב'

סעיף ג'

נמצא את שלושת ה"שחקנים"
ונציב את הנתונים בנוסחת השיפוע : $m = f'(x)|_{x=x_1}$

1. נמצא את שלושת ה"שחקנים":

$$m = 9$$

$$x_1 = \ln 3$$

$$f'(x) = \frac{2ae^{2x} \cdot (e^x - 1) - ae^{2x} \cdot e^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{ae^{2x} [2 \cdot (e^x - 1) - e^x]}{(e^x - 1)^2} = \frac{ae^{2x} [2e^x - 2 - e^x]}{(e^x - 1)^2} = \frac{ae^{2x} [e^x - 2]}{(e^x - 1)^2}$$

2. נציב בנוסחת השיפוע:

$$\begin{cases} m = 9 \\ x_1 = \ln 3 \\ f'(x) = \frac{ae^{2x} [e^x - 2]}{(e^x - 1)^2} \end{cases}$$

$$m = f'(x)|_{x=x_1} \rightarrow 9 = \left[\frac{ae^{2x} [e^x - 2]}{(e^x - 1)^2} \right]_{x=\ln 3} \rightarrow 9 = \frac{a \overbrace{e^{2\ln 3}}^9 \left[\overbrace{e^{\ln 3}}^3 - 2 \right]}{(e^{\ln 3} - 1)^2} \rightarrow 9 = \frac{9a[3-2]}{(3-1)^2}$$

$$\rightarrow 9 = \frac{9a}{4} \rightarrow 36 = 9a \rightarrow \boxed{a = 4}$$

תשובה סופית סעיף ג'

לטובת המשך התרגיל, נציב $a=4$ בפונקציה ובנגזרת:

$$f(x) = \frac{4e^{2x}}{e^x - 1}$$

$$f'(x) = \frac{4e^{2x} [e^x - 2]}{(e^x - 1)^2}$$

סעיף ד' (1)

מציאת נקודות חיתוך עם הצירים:

למציאת נקודות חיתוך עם ציר x , נציב $y=0$:

$$y=0: \frac{4e^{2x}}{e^x - 1} = 0 \rightarrow 4e^{2x} = 0 \rightarrow \text{אין פתרון}$$

למציאת נקודות חיתוך עם ציר y , נציב $x=0$:

לא בתחום ההגדרה

כלומר לפונקציה $f(x)$ אין נקודות חיתוך עם הצירים.

תשובה סופית סעיף ד' (1)

סעיף ד' (2)

מציאת אסימפטוטה אנכית:

$$=0 \text{ מכנה} \rightarrow e^x - 1 = 0 \rightarrow e^x = 1 \rightarrow \boxed{x=0}$$

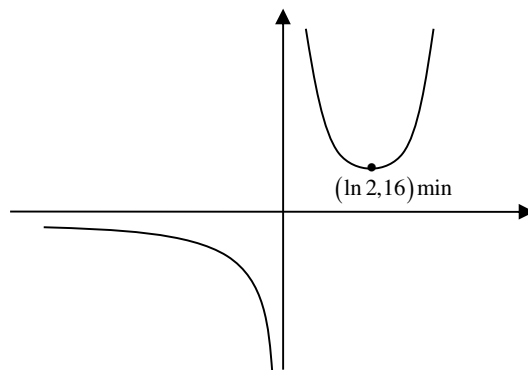
תשובה סופית סעיף ד' (2)

נוודא כי $x=0$ לא מאפס את המונה.

סעיף ד' (3)

נציב את שיעור ה- x של נקודת הקיצון ונמצא את שיעור ה- y :

$$x = \ln 2: y = \frac{4e^{2\ln 2}}{e^{\ln 2} - 1} = \frac{4 \cdot 4}{2 - 1} = 16 \rightarrow \boxed{(\ln 2, 16) \min}$$



תשובה סופית סעיף ד' (3)

סעיף ה'

נמצא את תחומי השליליות והחיוביות של הפונקציה $f(x)$:

תחומי חיוביות (מעל ציר x) - $x > 0$

תחומי שליליות (מתחת לציר x) - $x < 0$

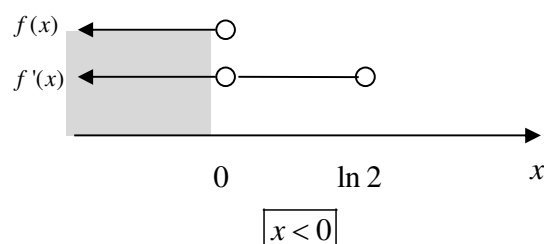
נמצא את תחומי השליליות והחיוביות של הפונקציה $f'(x)$:

תחומי חיוביות (מעל ציר x) - $x > \ln 2$

תחומי שליליות (מתחת לציר x) - $0 < x < \ln 2$ או $x < 0$



נמצא את התחום המשותף:



תשובה סופית סעיף ה'