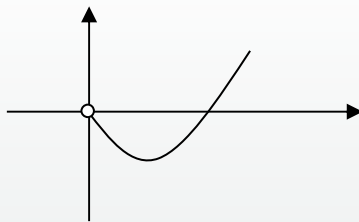


שאלה 4 מתוך קיץ 2020 (שאלון 805 בגרות במתמטיקה 4 יחידות)

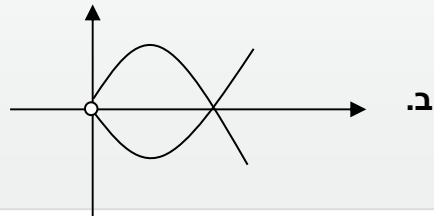
נתונה הפונקציה $f(x) = 4x \ln x$.

- א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
 (2) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).
 (3) מצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגה.
 (4) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
- נתונה בפונקציה $g(x) = -2f(x)$, שתחום הגדרתה זהה לתחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
 ב. הוסף סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$ למערכת הצירים שבה סרטטת את גרף הפונקציה $f(x)$.
 ג. מהו המרחק בין נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$ ובין נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$?



פתרון: א. $x > 0$. 2. $(1, 0)$. 3. $\min \left(\frac{1}{e}, -\frac{4}{e} \right)$. 4. $\frac{12}{e}$.

ג. $\frac{12}{e}$



פתרון מלא:

סעיף א'(1)

מציאת נקודות קיצון

$$\ln > 0 \text{ תוכן ה-} \rightarrow \boxed{x > 0}$$

תשובה סופית סעיף א'(1)

סעיף א'(2)

מציאת נקודות חיתוך עם הצירים

מציאת נקודות חיתוך עם ציר x (נציב $y=0$):

$$y = 0: 4x \ln x = 0$$

$$\swarrow \quad \searrow$$

$$\cancel{x=0}$$

$$x = 1 \rightarrow \boxed{(1, 0)}$$

תשובה סופית סעיף א'(2)

מציאת נקודות חיתוך עם ציר y (נציב $x=0$):

$x=0$ לא בתחום ההגדרה

סעיף א' (3)

מציאת נקודות קיצון של הפונקציה

שלב 1- נשווה את הנגזרת הנתונה לאפס

$$f(x) = 4x \ln x$$

$$f'(x) = \overbrace{(4x)'}^4 \cdot \ln x + 4x \cdot \overbrace{(\ln x)'}^{\frac{1}{x}} = 4 \ln x + 4x \cdot \frac{1}{x} = \boxed{4 \ln x + 4 = 0}$$

$$4(\ln x + 1) = 0 \rightarrow \ln x + 1 = 0 \rightarrow \ln x = -1 \rightarrow \boxed{x = e^{-1}}$$

שלב ב' – טבלה

		$x = e^{-2}$		$x = 1$
		↓		↓
x	$x = 0$		$x = e^{-1}$	
$f'(x)$		(-)		(+)
$f(x)$		↘	min	↗

נציב בנגזרת:

$$f'(x) = 4 \ln x + 4$$

$$f'(e^{-2}) = 4 \ln e^{-2} + 4 = 4 \cdot (-2) + 4 < 0$$

$$f'(1) = 4 \ln 1 + 4 = 4 > 0$$

↓

$$\boxed{x_{\min} = \frac{1}{e}}$$

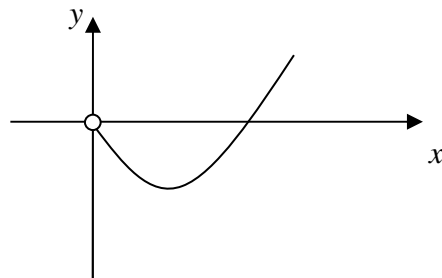
שלב ג' – נציב בפונקציה המקורית

$$x = \frac{1}{e} : y = 4 \cdot \frac{1}{e} \cdot \ln \frac{1}{e} = -\frac{4}{e} \rightarrow \boxed{\left(\frac{1}{e}, -\frac{4}{e}\right) \min}$$

תשובה סופית סעיף א' (3)

סעיף א' (4)

נצייר סקיצה של גרף הפונקציה

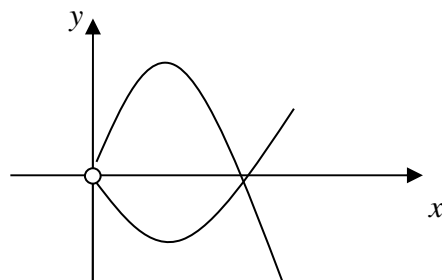


תשובה סופית סעיף א' (4)

סעיף ב'

נוסיף סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$

הפונקציה $g(x)$ הינה שיקוף של גרף הפונקציה $f(x)$ אולם בהכפלה של 2, כלומר:



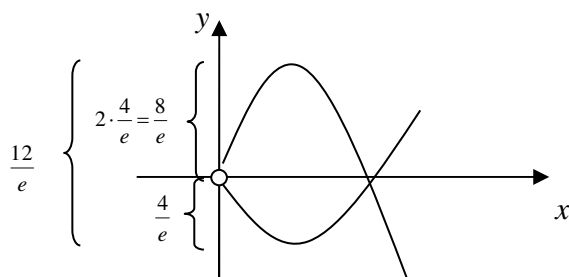
תשובה סופית סעיף ב'

סעיף ג'

מכיוון שפונקציית $g(x)$ הינה שיקוף של $-f(x)$ אז שיעור ה- x של נקודת הקיצון הינו זהה.

ההבדל הוא בשיעור ה- y משום ש- $g(x)$ הינה הכפלה ב-2 של $f(x)$.

כלומר, שיעור ה- y של $g(x)$ הינו $\frac{8}{e}$.



ולכן, המרחק בין נקודות הקיצון הוא $\frac{8}{e} + \frac{4}{e} = \boxed{\frac{12}{e}}$