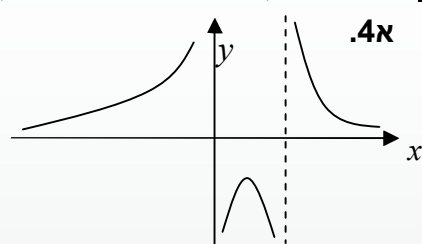


שאלה 6 מתוך בגרות חורף 2015 (בגרות במתמטיקה 4 יחידות)

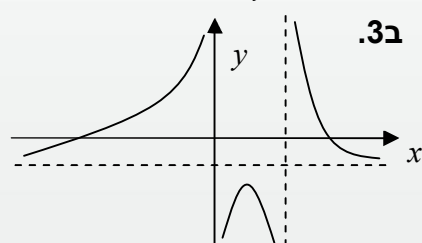
נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{2}{x^2 - x}$.

- א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$?
 (2) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המקבילות לצירים.
 (3) מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה), וקבע את סוגן.
 (4) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
 ב. נתונה הפונקציה $g(x) = f(x) - 2$ המקיימת $g(x) = f(x) - 2$.
 הסתמך על סעיף א', וענה על תת הסעיפים שלפניך:
 (1) מה הן האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $g(x)$?
 (2) מה הם השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$ (אם יש כאלה)?
 (3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

פתרון: א1. $x \neq 0, x \neq 1$ א2. $y = 0, x = 1, x = 0$ א3. $\max(0.5, -8)$



ב1. $x = 0, x = 1, y = -2$ ב2. $\max(0.5, -10)$



פתרון מלא:

סעיף א' (1)

מציאת תחום ההגדרה:

$$x^2 - x \neq 0 \rightarrow x(x-1) \neq 0 \rightarrow \text{מכנה} \neq 0$$

$$\swarrow \quad \searrow$$

$$\boxed{x \neq 0} \quad \boxed{x \neq 1}$$

תשובה סופית סעיף א' (1)

סעיף א' (2)

מציאת אסימפטוטות מקבילות לצירים:

מציאת אסימפטוטה אנכית (נשווה את המכנה לאפס):

$$\text{מכנה} = 0 \rightarrow \boxed{x = 1, x = 0}$$

(נוודא ש- $x=1,0$, לא מאפס את המונה)

מציאת אסימפטוטה אופקית (נחלק את המקדמים של החזקה הגבוהה):

$$y = \frac{2}{x^2 - x} \rightarrow \text{החזקה הגבוהה נמצאת במכנה} \rightarrow \boxed{y=0}$$

תשובה סופית סעיף א'(2)

סעיף א'(3)

מציאת תחומי עלייה וירידה

שלב א' - $f'(x) = 0$

$$f(x) = \frac{2}{x^2 - x}$$

$$f'(x) = \frac{\overbrace{(2)'}^0 (x^2 - x) - (2) \overbrace{(x^2 - x)'}^{2x-1}}{(x^2 - x)^2} = \frac{-2(2x-1)}{(x^2 - x)^2} = \boxed{\frac{-4x+2}{(x^2 - x)^2} = 0} \quad / \cdot (x^2 - x)^2$$

$$-4x+2=0 \rightarrow 4x=2 \rightarrow \boxed{x=\frac{1}{2}}$$

שלב ב' - טבלה

	$x = -1$		$x = \frac{1}{4}$	1		$x = 4$	
x		$x = 0$	$\downarrow$	$x = \frac{1}{2}$		$x = 1$	
y'	(+)		(+)		(-)		(-)
y	$\nearrow$		$\nearrow$	max	$\searrow$		$\searrow$

נציב בנגזרת ערכי x מהתחומים השונים בטבלה, ונבדוק את הסימן המתקבל

$$y' = \frac{-4x+2}{\underbrace{(x^2-x)^2}_{+}}$$

$$y'(-1) = 4+2 = 6 > 0$$

$$y'(2) = -8+2 = -6 < 0$$

$$y'\left(\frac{1}{4}\right) = -1+2 = 1 > 0$$

$$y'\left(\frac{3}{4}\right) = -3+2 = -1 < 0$$

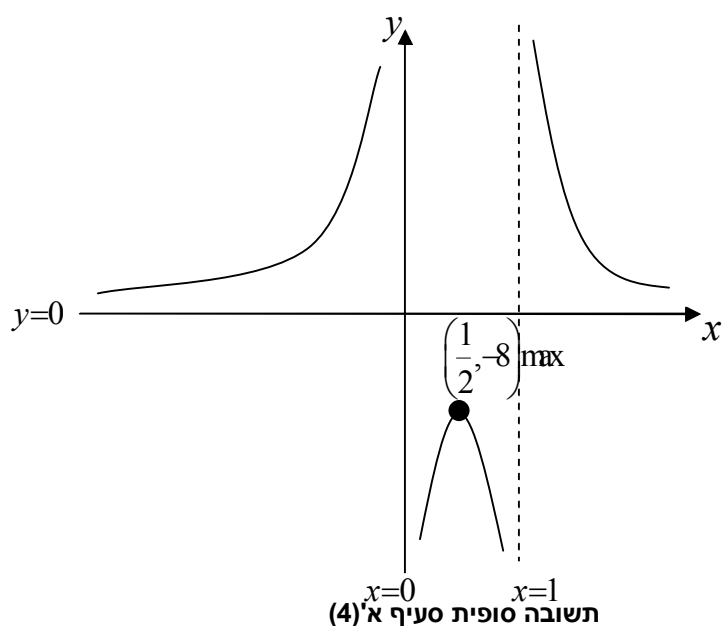
$$x_{\max} = \frac{1}{2}$$

שלב ג' – נציב בפונקציה המקורית:

$$x = \frac{1}{2} : y = \frac{2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}} = \frac{2}{\frac{1}{4} - \frac{1}{2}} = \frac{2}{-\frac{1}{4}} = -8 \rightarrow \left(\frac{1}{2}, -8\right)_{\max}$$

תשובה סופית סעיף א' (3)

סעיף א' (4)



סעיף ב' (1)

נתון כי:

$$g(x) = f(x) - 2$$

כלומר:

$$g(x) = \frac{2}{x^2 - x} - 2$$

כלומר, "הורידו" את גרף הפונקציה של $f(x)$ ב-2 יחידות, ולכן, האסימפטוטה האופקית של הפונקציה "ירדה" ב-2 יחידות, ולכן:

$$y = -2$$

הזזה אנכית של $f(x)$ ב-2 יחידות, לא משפיעה על האסימפטוטות האנכיות, ולכן הן זהות:

$$x=0, x=1$$

תשובה סופית סעיף ב'(1)

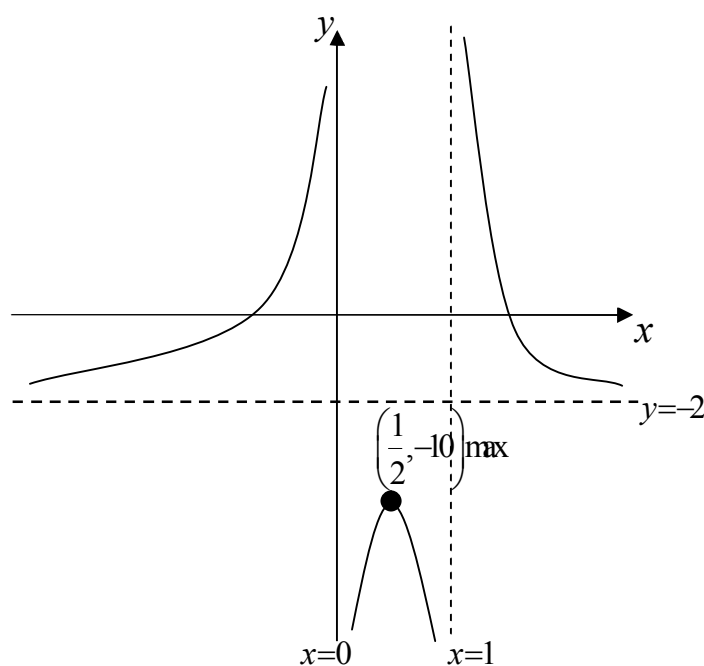
סעיף ב'(2)

עקב הורדת הפונקציה $f(x)$ ב-2 יחידות, נקודת הקיצון ירדה ב-2 יחידות, ולכן:

$$\left(\frac{1}{2}, -10\right)$$

תשובה סופית סעיף ב'(2)

סעיף ב'(3)



תשובה סופית סעיף ב'(3)