

מכניקה - קינמטיקה

חקירת תנועה של גוף בעזרת תרשים עקבות



הערכת מהירויות הגוף ותאוצתו בזמנים שונים:

- ▶ חקירת מהירות תנועתו של גוף על פי טבלת ערכים מקום-זמן
- ▶ חקירת תאוצתו של גוף על פי טבלת ערכים מהירות-זמן (ניתוח קינמטי של תנועה מואצת)
- ▶ עבודה בעזרת גיליון אלקטרוני (אקסל)

הערכת מהירויות הגוף ותאוצתו ברגעים השונים

תלמידה המבצעת ניסוי למציאת המהירויות והתאוצות של גוף ברגעים השונים של תנועתו, מפיקה לשם כך **תרשים עקבות** של גוף הנע לאורך קו ישר.

התלמידה כותבת את ערכי מקום-זמן בטבלה הבאה, כאשר:

◀ הכיוון החיובי מוגדר ככיוון החיובי של ציר ה- x

◀ $t_0=0$

$x[m]$	$t[sec]$
0	0
0.002	0.02
0.014	0.04
0.056	0.06
0.132	0.08
0.25	0.1
0.44	0.12
0.7	0.14
1.036	0.16
1.48	0.18
2.04	0.2
2.68	0.22
3.5	0.24

כיצד תוכל התלמידה לחשב (בקירוב) את מהירויות הגוף ותאוצתו בעזרת הנתונים שאספה ברגעים השונים?

התלמידה מנסה לחשב את המהירות הרגעית ברגע $t=0.18[s]$ בעזרת הגדרת המהירות הרגעית אך נתקלת בבעיה, כזכור, המהירות הרגעית מתקבלת כאשר פרק הזמן קטן מאוד, שואף לאפס:

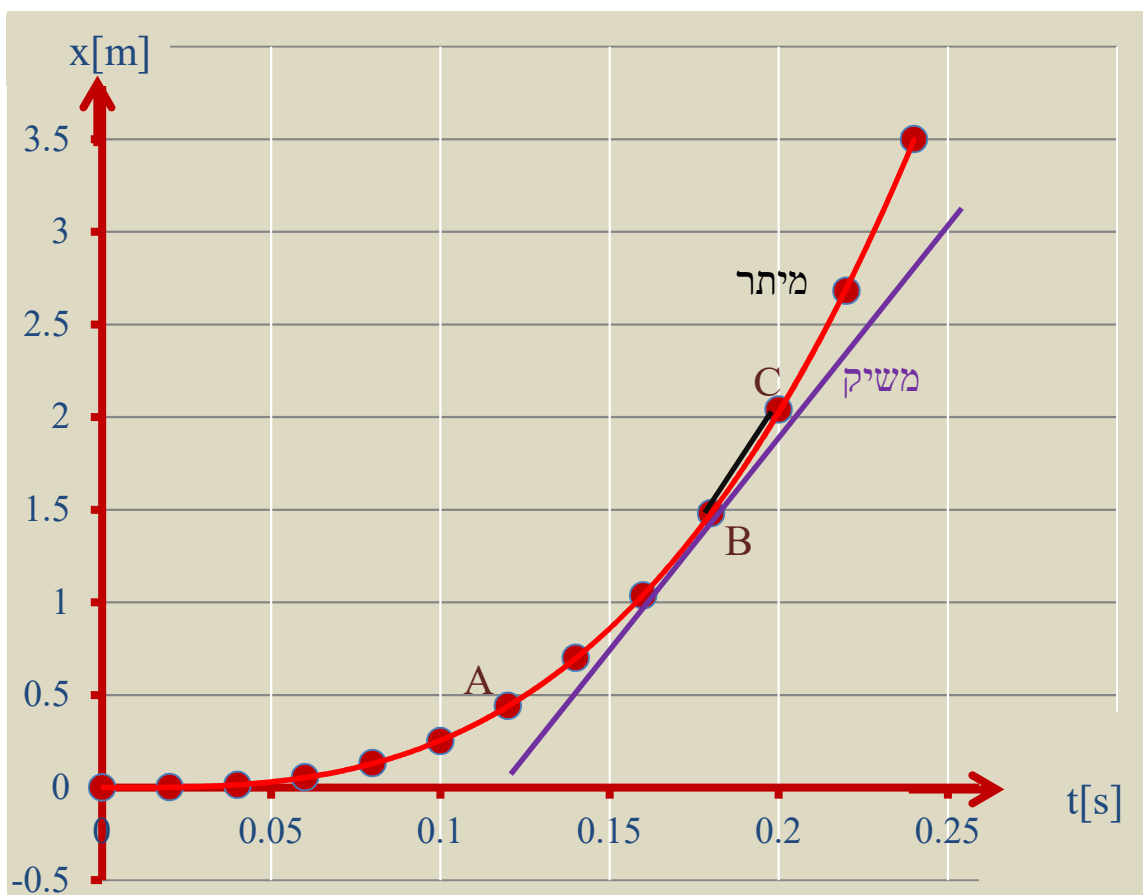
$$v(t) = \left(\frac{\Delta x}{\Delta t} \right)_{\Delta t \rightarrow 0}$$

לתלמידה אין נתונים לגבי העתקי הגוף כאשר מרווחי הזמן קטנים מאוד (שואפים לאפס). אולם, בטבלה מוצגים זמנים בהפרשים של מאיות השנייה, לכן נשתמש בנתונים אלה על מנת לקבל תוצאות מקורבות. נעשה זאת באמצעות שרטוט גרף מקום-זמן של התנועה על פי הנתונים שבטבלה.

בדוגמא הבאה נבחר מרווחי זמן שונים, וננסה להעריך לפיהם את מהירות הגוף ברגע $t=0.18[s]$ נתבונן בגרף הבא:

גרף מקום-זמן (1)

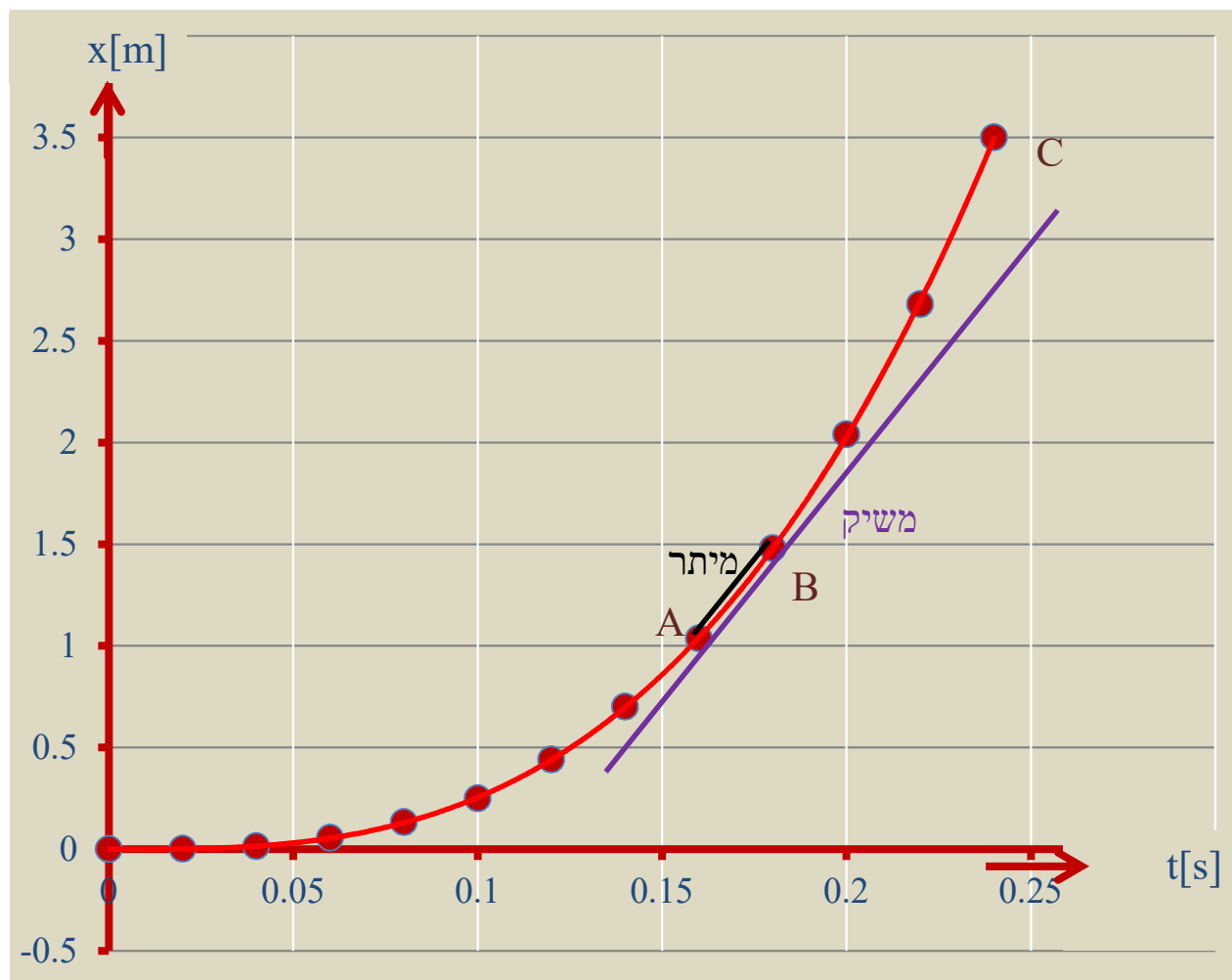
הואיל ואיננו יכולים לבדוק את השיפוע בנקודה הספציפית, נבחר את הנקודות הקרובות ביותר האפשריות. נניח שברגע $t=0.18\text{s}$ הגוף נמצא בנקודה B, נבחר את נקודה C, הקרובה ביותר ל-B, שהתקבלה ברגע $t=0.2\text{s}$ (כלומר $\Delta t=0.02\text{s}$):



אפשר לראות כי שיפוע המיתר בין הנקודות B ו-C גדול משיפוע המשיק לעקומה בנקודה B. כלומר: המהירות הממוצעת בקטע BC גדולה מן המהירות הרגעית בנקודה B.

גרף מקום-זמן (2)

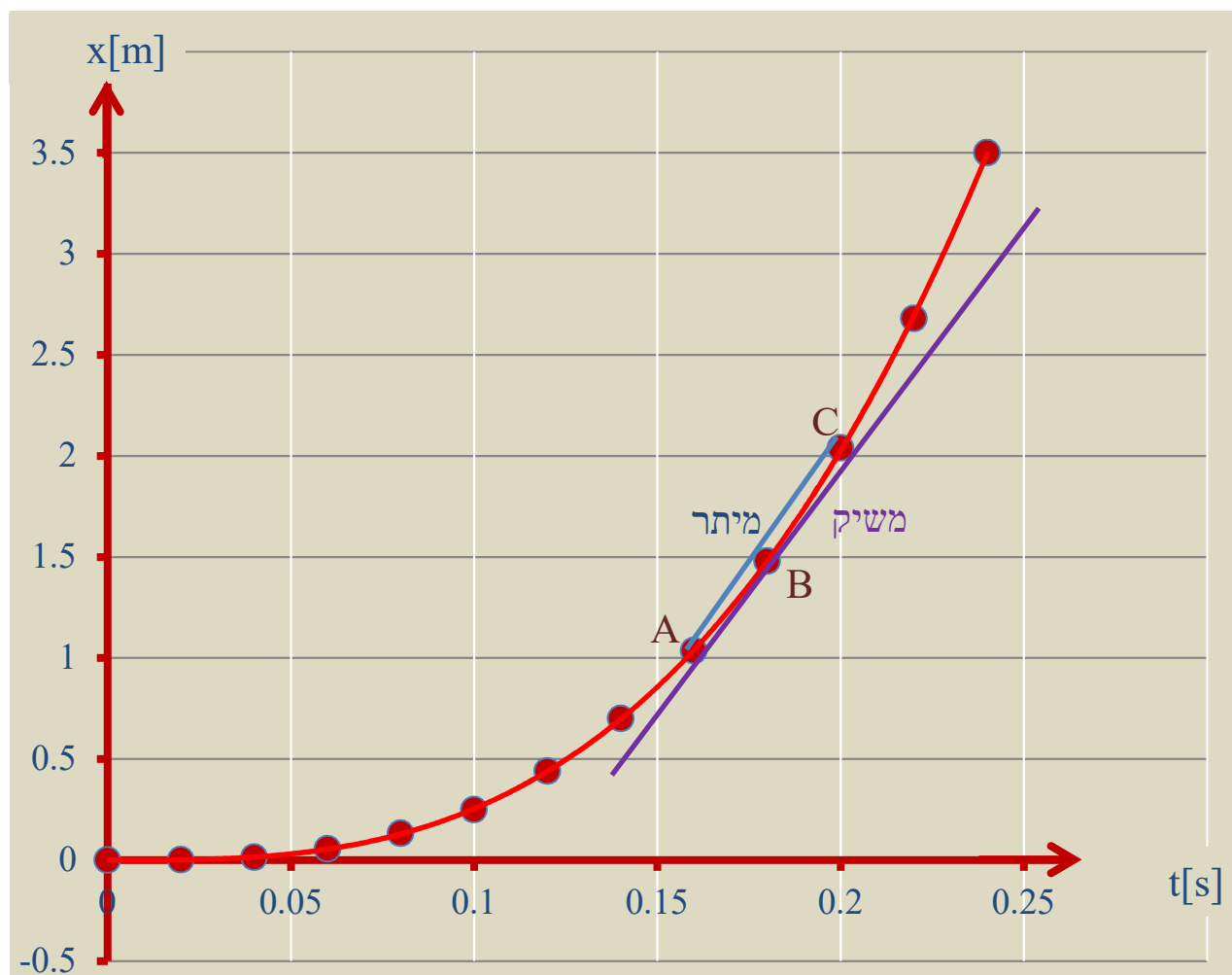
נמשיך להניח שברגע $t=0.18[s]$ הגוף נמצא בנקודה B, ונבחר הפעם את נקודה A הקרובה ביותר ל-B שהתקבלה ברגע $t=0.16[s]$ (כלומר, גם הפעם $\Delta t=0.02[s]$):



הפעם, שיפוע המיתר בין הנקודות A ו-B קטן משיפוע המשיק לעקומה בנקודה B. כלומר: המהירות הממוצעת בקטע AB קטנה מן המהירות הרגעית בנקודה B.

גרף מקום-זמן 3

לאור התוצאות שקיבלנו קודם, נבחר הפעם את נקודה A שהתקבלה ברגע $t=0.16[s]$ ואת נקודה C שהתקבלה ברגע $t=0.2[s]$ (הפעם $\Delta t=0.04[s]$):

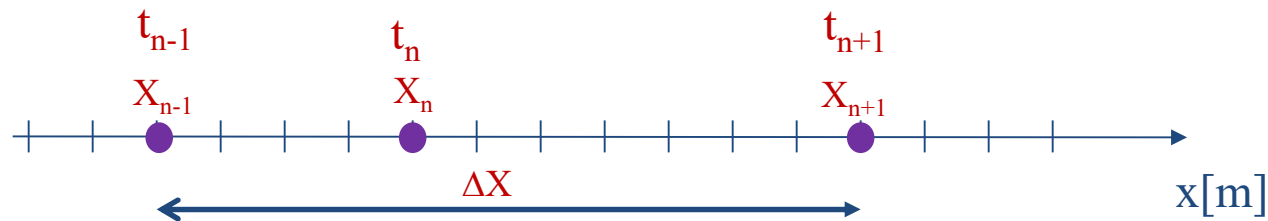


אפשר לראות כי המיתר המחבר בין הנקודות A ו-C מקביל בקירוב למשיק לעקומה בנקודה B. כלומר: המהירות הממוצעת בקטע AC שווה בקירוב למהירות הרגעית בנקודה B.

חישוב מקורב של מהירות רגעית

מסקנה: ◀

לצורך חישוב המהירות הרגעית ברגע מסוים, מחשבים את המהירות הממוצעת בפרק הזמן שבין שתי הנקודות הידועות, הסמוכות ביותר לרגע המבוקש.



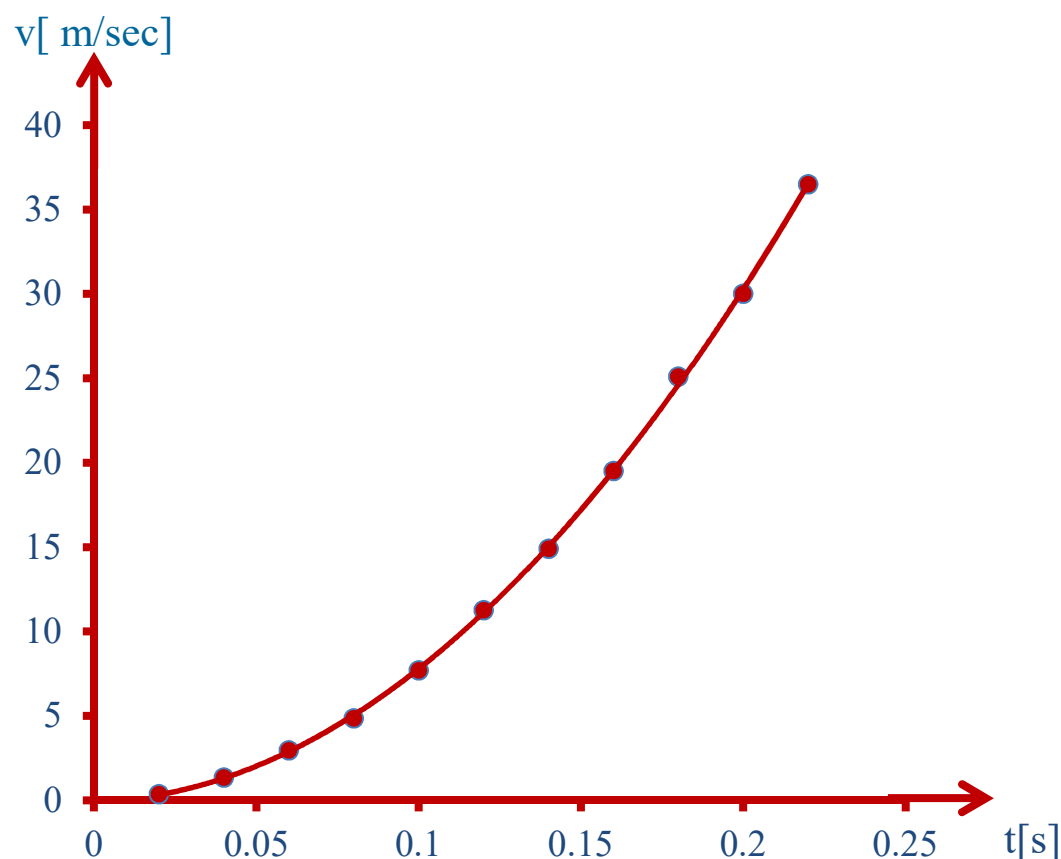
$$\bar{V}_n = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_{n+1} - x_{n-1}}{t_{n+1} - t_{n-1}}$$

נמצא את המהירות הרגעית ברגע $t=0.18[s]$ (בנקודה B) על ידי חישוב המהירות הממוצעת בקטע המתאים:

$$V_{0.18} \approx \bar{V}_{0.16 \rightarrow 0.2} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{2.04 - 1.036}{0.2 - 0.16} = 25.1$$

באותה השיטה חושבו גם המהירויות ברגעים האחרים פרט לרגע הראשון (מכיוון שאין מידע לגבי מקומו בנקודת הזמן הקודמת), ופרט לרגע האחרון (אין מידע לגבי מקומו בנקודת זמן מאוחרת). נתונים אלו הוכנסו לטבלה ועל-פיה התלמידה שרטטה את גרף מהירות זמן.

$v[m/s]$	$x[m]$	$t[s]$
	0	0
0.35	0.002	0.02
1.35	0.014	0.04
2.95	0.056	0.06
4.85	0.132	0.08
7.7	0.25	0.1
11.25	0.44	0.12
14.9	0.7	0.14
19.5	1.036	0.16
25.1	1.48	0.18
30	2.04	0.2
36.5	2.68	0.22
	3.5	0.24



מהגרף ניתן לראות כי המהירות אינה קבועה, ולכן לגוף יש תאוצה. כיצד תוכל התלמידה בעזרת הטבלה והגרף לחשב (בקירוב) את תאוצות הגוף ברגעים השונים?

אם התלמידה תנסה לחשב את התאוצה הרגעית ברגע $t=0.16[s]$ בעזרת הגדרת התאוצה הרגעית היא שוב תתקל בבעיה, כזכור התאוצה הרגעית מתקבלת כאשר פרק הזמן קטן מאוד, שואף לאפס:

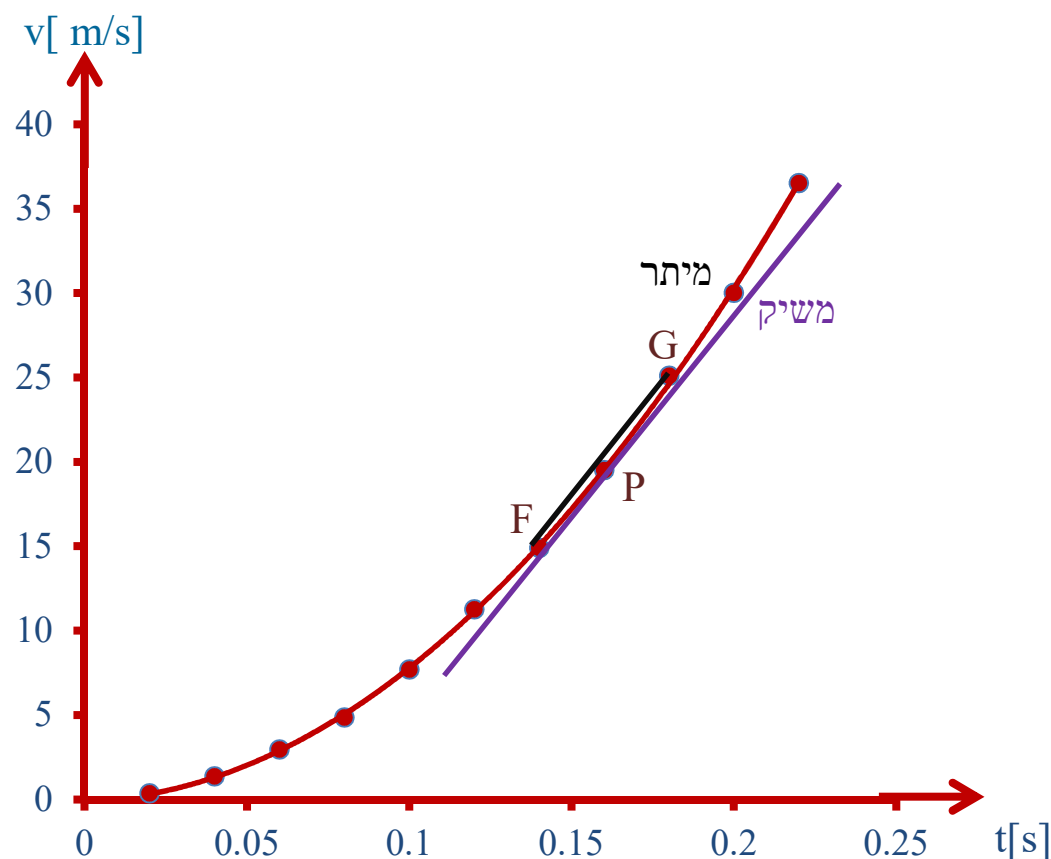
$$a(t) = \left(\frac{\Delta v}{\Delta t} \right)_{\Delta t \rightarrow 0}$$

לתלמידה אין נתונים לגבי מהירויות הגוף כאשר מרווחי הזמן קטנים מאוד.

נאמץ את אותה השיטה בה נקטנו כדי להעריך את מהירות הגוף ברגע נתון, בכדי להעריך את תאוצת הגוף ברגע נתון. גם הפעם נעזר בטבלה ובגרף מהירות-זמן של התנועה.

גרף מהירות-זמן 4

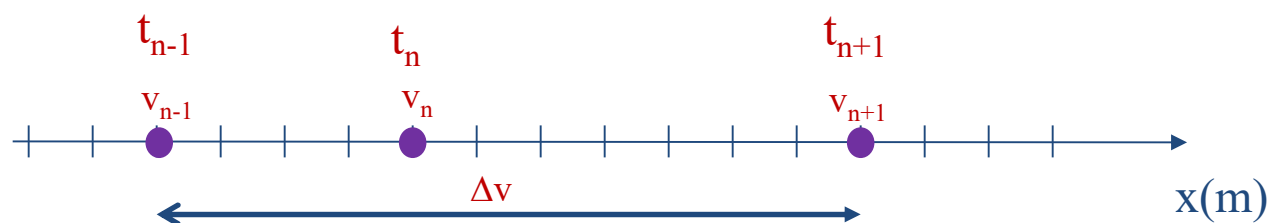
ברור שאם התלמידה תבחר בפרק הזמן הקצר ביותר האפשרי, כלומר- בין נקודה F (t=0.14[s]) לנקודה G (t=0.18[s]) הסמוכות ביותר לנקודה P, תוצאת החישוב תהיה מדויקת יותר ושווה בקירוב לתאוצה הרגעית בנקודה P.



חישוב מקורב של תאוצה רגעית

מסקנה: ◀

לצורך חישוב התאוצה הרגעית ברגע מסוים, מחשבים את התאוצה הממוצעת בפרק הזמן החל מהנקודה שלפני הרגע המסוים עד לנקודה שאחרי הרגע המסוים.



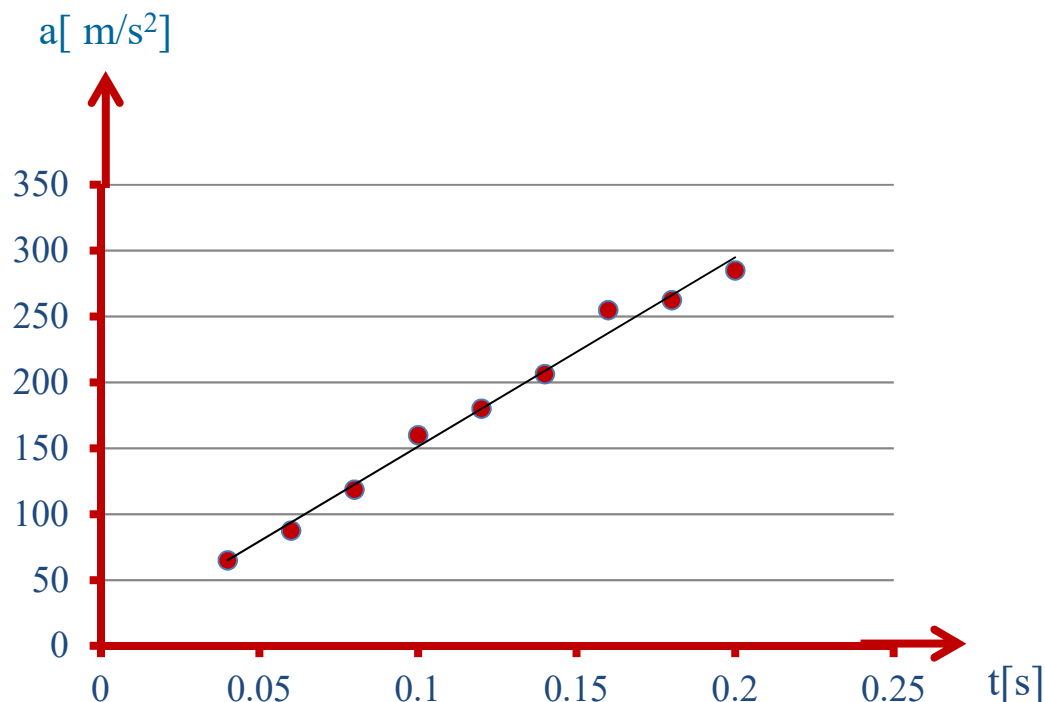
$$\bar{a}_n = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_{n+1} - v_{n-1}}{t_{n+1} - t_{n-1}}$$

נמצא את התאוצה הרגעית ברגע $t=0.16[s]$ (בנקודה P) על ידי חישוב התאוצה הממוצעת בקטע המתאים:

$$a_{0.16} \cong \bar{a}_{0.14 \rightarrow 0.18} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{25.1 - 14.9}{0.18 - 0.14} = 255$$

באותה השיטה חושבו גם התאוצות ברגעים האחרים פרט לרגע הראשון (אין מידע לגבי מהירותו בנקודת הזמן הקודמת), ופרט לרגע האחרון (אין מידע לגבי מהירותו בנקודת זמן מאוחרת). נתונים אלו הוכנסו לטבלה ועל-פיה התלמידה שרטטה את גרף תאוצה-זמן. אנו רואים שהתאוצה אינה קבועה, בתאום עם גרף המהירות שהשיפוע שלו לא היה קבוע.

$a[m/s^2]$	$v[m/s]$	$x[m]$	$t[s]$
		0	0
	0.35	0.002	0.02
65	1.35	0.014	0.04
87.5	2.95	0.056	0.06
118.75	4.85	0.132	0.08
160	7.7	0.25	0.1
180	11.25	0.44	0.12
206.25	14.9	0.7	0.14
255	19.5	1.036	0.16
262.5	25.1	1.48	0.18
285	30	2.04	0.2
	36.5	2.68	0.22
		3.5	0.24



תלמיד חוקר את תנועתה של קרונית הנעה במהירות משתנה. מרגע מסוים, המוגדר כ- $t=0$, הוא מדד את מקומה של הקרונית במרווחי זמן של $0.02[s]$.

ברגע $t=0$ מהירות הקרונית אינה שווה בהכרח לאפס. ציר המקום, x , נבחר כך שראשיתו בנקודה שבה נמצאת הקרונית ברגע $t=0$, וכיוונו החיובי הוא בכיוון תנועת הקרונית.

תוצאות המדידות רשומות בטבלה שלפניכם.

$a[m/s^2]$	$v[m/s]$	$x[m]$	$t[s]$
		0	0
		0.01	0.02
		0.024	0.04
		0.042	0.06
		0.064	0.08
		0.09	0.1
		0.12	0.12

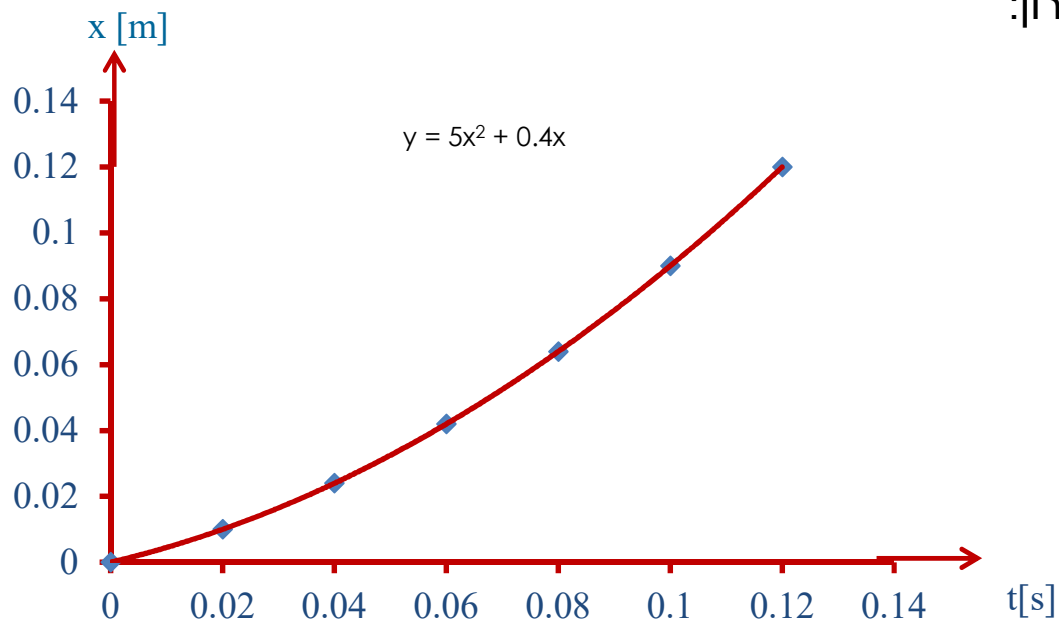
- שרטטו, על פי תוצאות המדידות גרף מקום-זמן של תנועת הגוף.
- האם מהירות הגוף גדלה עם הזמן, קטנה או אינה משתנה? נמקו!
- חשבו את מהירויות הקרונית ברגעים השונים והציגו אותן בטבלה.
- שרטטו גרף מהירות-זמן של תנועת הגוף. האם תאוצת הגוף קבועה? נמקו!
- חשבו את תאוצות הקרונית ברגעים השונים והציגו אותן בטבלה.
- שרטטו גרף תאוצה-זמן של תנועת הגוף.

פתרון תרגיל כיתה

פתרון:

א.

a[m/s ²]	v[m/s]	x[m]	t[s]
		0	0
	0.6	0.01	0.02
10	0.8	0.024	0.04
10	1	0.042	0.06
10	1.2	0.064	0.08
	1.4	0.09	0.1
		0.12	0.12



ב. המהירות גדלה. מהגרף - שיפוע הגרף גדל, מהטבלה - המרחקים בין העקבות הולכים וגדלים.

$$V_{0.02} \cong \bar{V}_{0.04 \rightarrow 0} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{0.024 - 0}{0.04 - 0} = 0.6 \left[\frac{m}{s} \right]$$

$$V_{0.04} \cong \bar{V}_{0.06 \rightarrow 0.02} = \frac{0.042 - 0.01}{0.06 - 0.02} = 0.8 \left[\frac{m}{s} \right]$$

ג.

$$V_{0.06} \cong \bar{V}_{0.08 \rightarrow 0.04} = \frac{0.064 - 0.024}{0.08 - 0.04} = 1 \left[\frac{m}{s} \right]$$

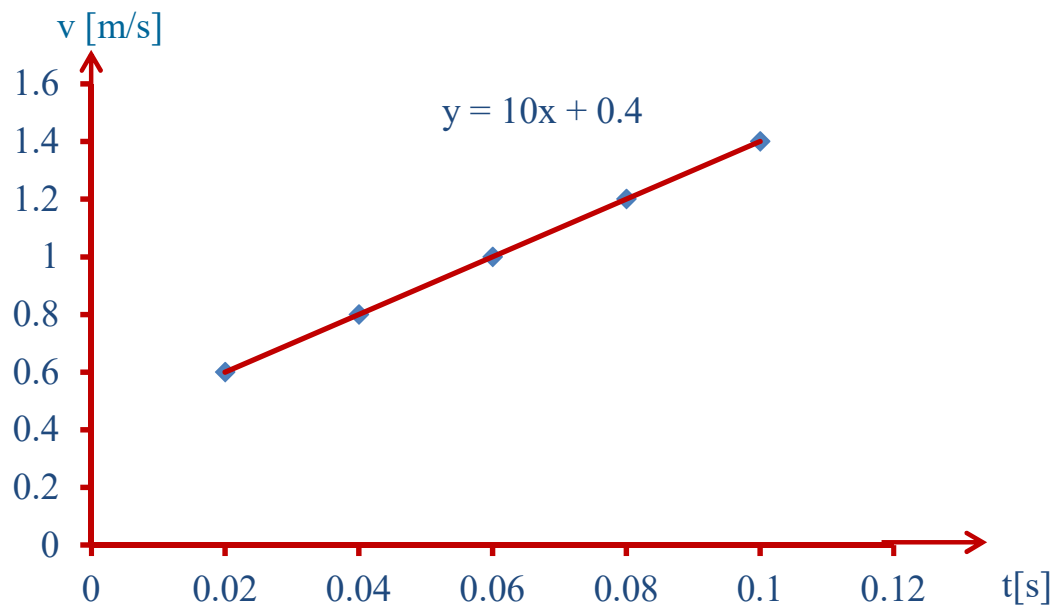
$$V_{0.08} \cong \bar{V}_{0.1 \rightarrow 0.06} = \frac{0.09 - 0.042}{0.04 - 0.02} = 1.2 \left[\frac{m}{s} \right]$$

$$V_{0.1} \cong \bar{V}_{0.12 \rightarrow 0.08} = \frac{0.12 - 0.064}{0.12 - 0.08} = 1.4 \left[\frac{m}{s} \right]$$

המשך פתרון תרגיל כיתה

.ד

a[m/s ²]	v[m/s]	x[m]	t[s]
		0	0
	0.6	0.01	0.02
10	0.8	0.024	0.04
10	1	0.042	0.06
10	1.2	0.064	0.08
	1.4	0.09	0.1
		0.12	0.12



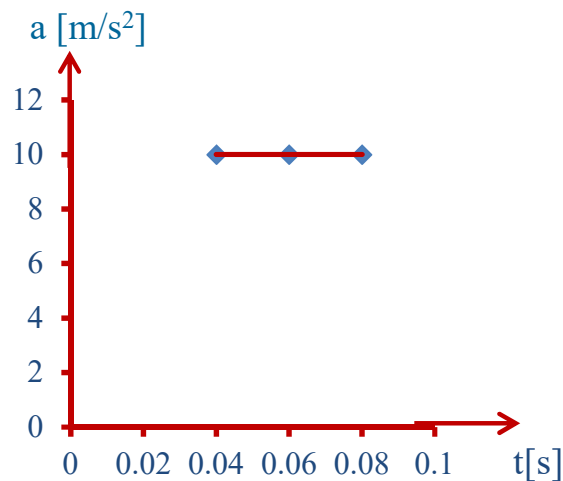
התאוצה קבועה כי גרף מהירות-זמן הוא לינארי – ושיפועו שווה ל- 10.

ה.ו

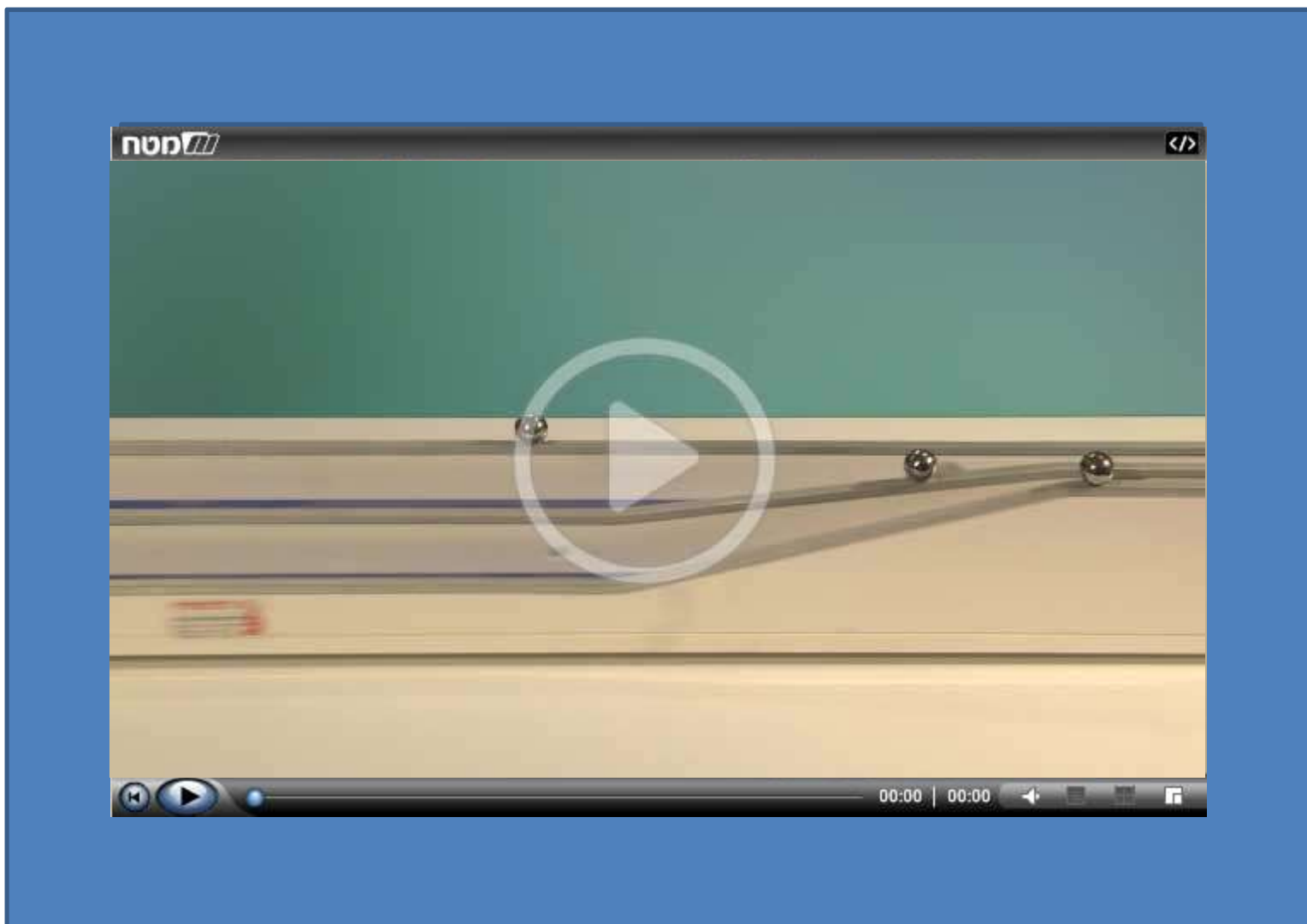
$$a_{0.04 \rightarrow 0.06} \approx \bar{a}_{0.06 \rightarrow 0.02} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{1 - 0.6}{0.06 - 0.02} = 10 \left[\frac{m}{s^2} \right]$$

$$a_{0.06 \rightarrow 0.08} \approx \bar{a}_{0.08 \rightarrow 0.04} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{1.2 - 0.8}{0.08 - 0.04} = 10 \left[\frac{m}{s^2} \right]$$

$$a_{0.08 \rightarrow 0.1} \approx \bar{a}_{0.1 \rightarrow 0.06} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{1.4 - 1}{0.1 - 0.06} = 10 \left[\frac{m}{s^2} \right]$$



סרטון הדגמה: פרדוקס הזמנים



פרדוקס הזמנים - דיון (1)

איזה כדור יגיע ראשון?

א. הקרוב אליכם

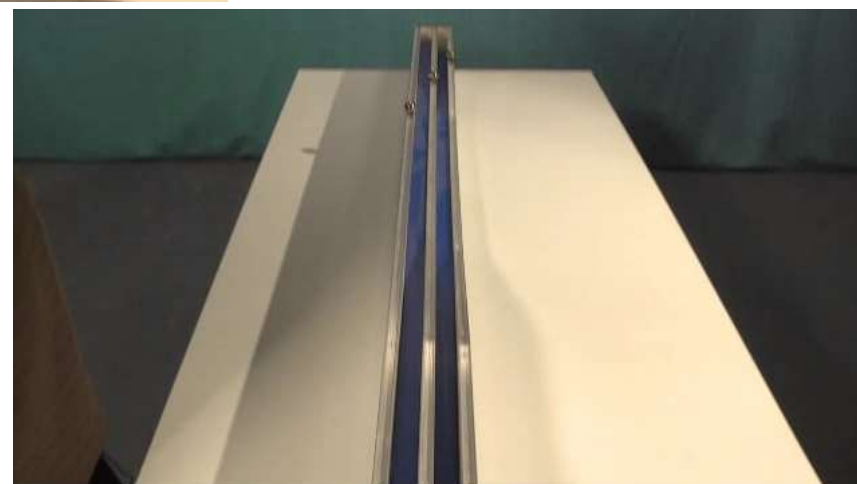
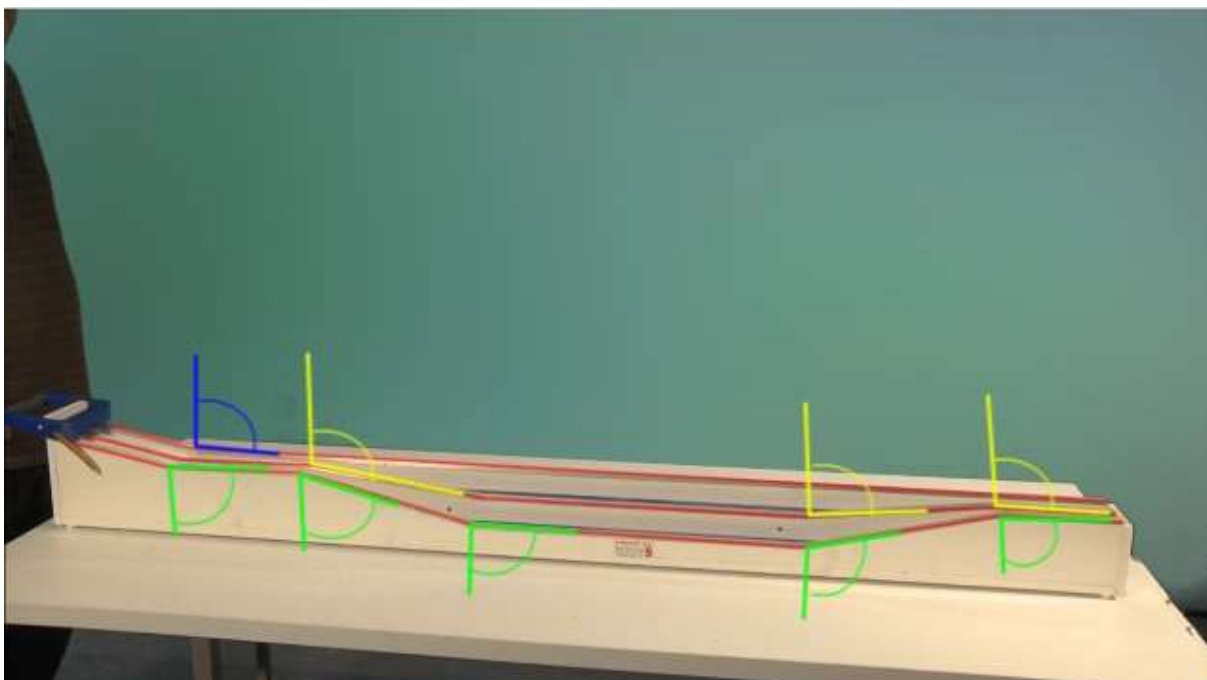
ב. האמצעי

ג. הרחוק מכם



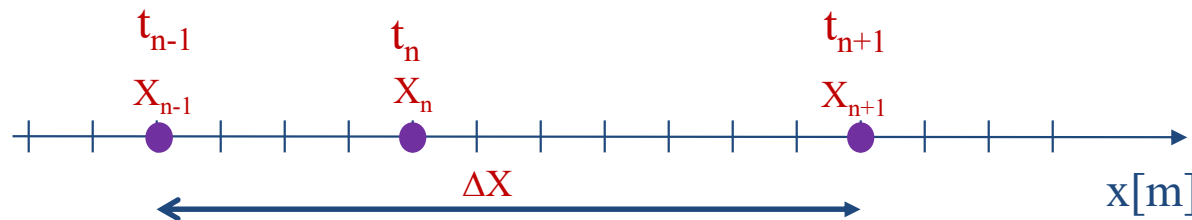
פרדוקס הזמנים - דיון (2)

איך נוכל להסביר את התוצאה?



השלבים בהערכת מהירויות הגוף ברגעים השונים:

- כתיבת ערכי מקום-זמן בטבלה בהתאם לתרשים עקבות, ושרטוט גרף מקום-זמן
- לצורך חישוב המהירות הרגעית ברגע מסוים, מחשבים את המהירות הממוצעת בפרק הזמן החל מהנקודה שלפני הרגע המסוים עד לנקודה שאחרי הרגע המסוים

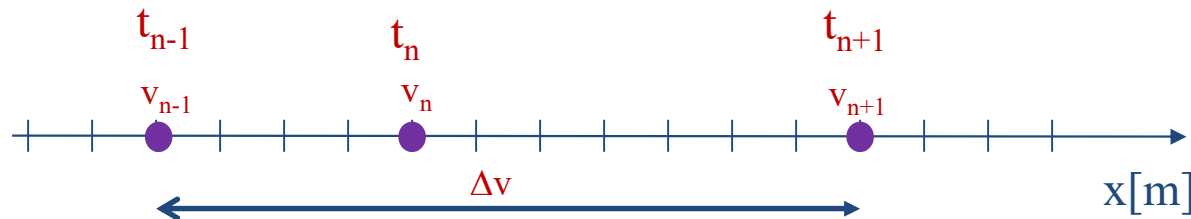


$$\bar{V}_n = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_{n+1} - x_{n-1}}{t_{n+1} - t_{n-1}}$$

- חישוב המהירויות ברגעים האחרים, הכנסת הנתונים לטבלה ועל-פיה שרטוט גרף מהירות-זמן.

הערכת תאוצת הגוף ברגעים השונים:

- מחשבים את התאוצה הממוצעת בפרק הזמן החל מהנקודה שלפני הרגע המסוים עד לנקודה שאחרי הרגע המסוים



$$\bar{a}_n = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_{n+1} - v_{n-1}}{t_{n+1} - t_{n-1}}$$

- באותה השיטה מחשבים גם התאוצות ברגעים האחרים פרט לרגע הראשון ולרגע האחרון
- חישוב התאוצות ברגעים האחרים, הכנסת הנתונים לטבלה ועל-פיה שרטוט גרף תאוצה-זמן.