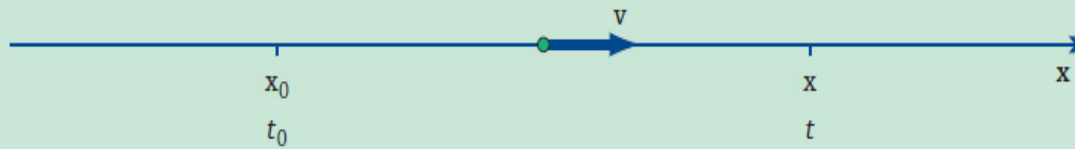


4.2 פונקציית מקום-זמן עבור תנועה שוות-מהירות

א. נוסחת מקום-זמן

כדי לפתח נוסחה של מקומו של גוף הנע במהירות קבועה כפונקציה של הזמן, נדון במצב זה:

גוף נע לאורך קו ישר. ציר x מוגדר בכיוון התנועה של הגוף. t_0 מוגדר ברגע מסוים במהלך תנועתו של הגוף; ברגע זה מקום הגוף מסומן ב- x_0 . הגוף נע בתנועה קצובה במהירות v (איור 16).



איור 16: תרשים הנעיה

מהי הנוסחה המתארת את מקום הגוף, x , כפונקציה של הזמן, t ?

נתייחס לתנועת הגוף מהנקודה ששיעורה x_0 עד לנקודה כלשהי ששיעורה x , שאליה הגוף הגיע ברגע t . הביטוי למהירות הגוף, על-פי הגדרת המהירות בתנועה שוות-מהירות, ניתן על-ידי:

$$v = \frac{x - x_0}{t - t_0} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

מכאן מתקבל:

$$(3) \quad v \Delta t + x_0 = x$$

במקרים רבים נוכל לבחור $t_0 = 0$, ואז $t = t - t_0 = t$ לכן נוסחה (3) תצטמצם לנוסחה:

$$(3') \quad vt + x_0 = x$$

הערות:

1. נוסחה (3') מתארת את מקום הגוף, x , (המשתנה התלוי) כפונקציה של הזמן, t (המשתנה הבלתי תלוי) והיא מכונה נוסחת מקום-זמן עבור תנועה שוות-מהירות.
2. נוסחה (3') כוללת נוסף לשני המשתנים x ו- t גם שני קבועים x_0 ו- v משמעות הנוסחה היא שמקום הגוף, x , ברגע כלשהו, t , שווה לסכום של המקום ההתחלתי x_0 של הגוף, והעתק שלו vt (הוא העתקו של הגוף במשך שנייה אחת, לכן הוא העתקו של הגוף ב- t שניות).
3. נשתמש בנוסחה (3) (ולא ב-3') כאשר לא נוכל לבחור $t_0 = 0$. זה יכול לקרות, כאשר מדובר בתנועת גוף יחיד אשר בקטעים שונים נע במהירויות קבועות שונות, או כאשר מדובר בשני גופים שמתחילים לנוע ברגעים שונים.

באילו יחידות יש להציג את הגדלים המופיעים בנוסחה (3)?

השוויון בנוסחה צריך להתקיים מבחינה מספרית וגם מבחינת היחידות.

דוגמה: גוף יצא לדרכו מנקודה ששיעורה $x_0 = 50$ m, ונע במהירות קבועה של 10 h/km. לאן הגיע הגוף כעבור שעתיים? אם נציב נתונים אלה בנוסחה (3') נקבל:

$$x = 50 \text{ m} + 10 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 2\text{h} = 50 \text{ m} + 20 \text{ km}$$

לא נוכל לחבר 50 m ו-20 km ללא המרת יחידות, אם נדבוק ביחידות SI לא נוכל לטעות ביחידות. אולם, איננו חייבים לדבוק ביחידות SI, בתנאי שתהיה התאמה. לדוגמה, אם גוף נע במהירות h/km מנקודה ששיעוריה $x_0 = 2 \text{ km}$, ושואלים תוך כמה זמן הוא מגיע לנקודה $x = 12 \text{ km}$ אזי מהצבה בקשר (3) נקבל:

$$12 \text{ km} = 2 \text{ km} + 10 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot t$$

בנוסחה זו, כדי שתהיה התאמה בין היחידות, t צריך להיות מבוטא בשעות. נקבל מפתרון המשוואה $1h$

ב. גרף מקום-זמן

מהי צורת גרף מקום-זמן בתנועה שוות מהירות?

נוסחה (3) היא נוסחת מקום-זמן כאשר x_0 ו-v הם קבועים. זהו קשר מתמטי שתבניתו הכללית מסומנת:

$$n + mx = y \quad (4)$$

העקומה המתאימה לתבנית זו היא קו ישר (קו לינארי). המשמעות הגרפית של m היא שיפוע הישר, והמשמעות הגרפית של n היא שיעור ה-y של הנקודה שבה הישר חותך את הציר y.

כאשר משווים את נוסחת מקום-זמן (3) עם התבנית הכללית (4) רואים כי את מקומו של הפרמטר m בתבנית הכללית (4) ממלאת בנוסחה (3) המהירות v, ואת מקום הפרמטר n ממלא המקום ההתחלתי x_0 . מכאן עולה מסקנה.

גרף מקום-זמן בתנועה שוות מהירות:

הגרף המתאר את מקומו של גוף הנע במהירות קבועה כפונקציה של הזמן הוא קו ישר, שיפועו מייצג את מהירות הגוף, ונקודת החיתוך שלו עם הציר האנכי (x) מייצגת את מקום הגוף ברגע $t_0 = 0$. כלומר את x_0 .

גרפי מקום-זמן ישרים יכולים להיות בעלי שיפועים שונים ונקודות חיתוך שונות עם הציר האנכי. דוגמאות לכך מופיעות באיור 17.

כל העקומות באיור 17 הן קווים ישרים, לכן כל אחת מהן מייצגת תנועה שוות-מהירות. נעמוד על מאפיינים של הגרפים השונים:

איור 17א: הגוף יוצא לדרכו ברגע $t_0 = 0$ מראשית ציר המקום ($x_0 = 0$) ומהירותו חיובית, כלומר הוא נע בכיוון החיובי של ציר המקום.

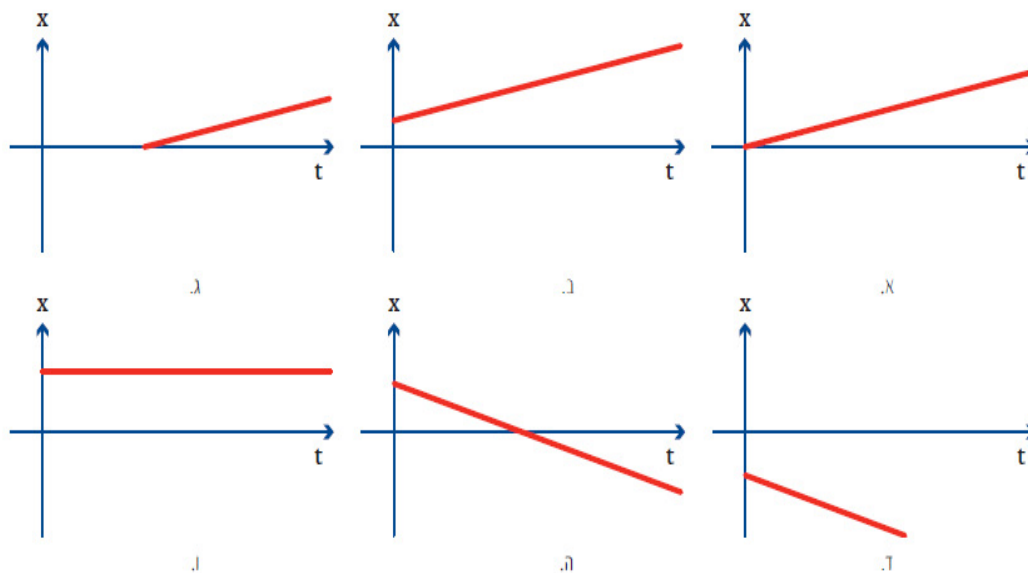
איור 17ב: הגוף יוצא לדרכו ברגע $t_0 = 0$ מנקודה ששיעורה חיובי ($x_0 > 0$) והוא נע בכיוון החיובי של ציר המקום.

איור 17ג: הגוף יוצא לדרכו ברגע $t_0 > 0$ מהראשית של ציר המקום ($x_0 = 0$) והוא נע בכיוון החיובי של ציר המקום.

איור 17ד: הגוף יוצא לדרכו ברגע $t_0 = 0$ מנקודה ששיעורה שלילי ($x_0 < 0$) והוא נע בכיוון השלילי של ציר המקום.

איור 17ה: הגוף יוצא לדרכו ברגע $t_0 = 0$ מנקודה ששיעורה חיובי ($x_0 > 0$) והוא נע בכיוון השלילי של ציר המקום. ברגע מסוים הגוף עובר בנקודת הראשית של הציר.

איור 17ו: הגוף נח בנקודה על ציר ה-x ששיעורה חיובי.



איור 17: גרפי מקום-זמן שונים של גופים שכל אחד מהם נע במהירות קבועה

4.3 דוגמאות להתרת תרגילים - תנועה שוות-מהירות

דוגמה 2: יישום נוסחת מקום-זמן

גוף נע במהירות קבועה. הוא חולף ברגע $t = 2$ s בנקודה ששיעורה $x = 3$ m, וברגע $t = 5$ s בנקודה ששיעורה

$$x = 9 \text{ m}$$

- מהי מהירות הגוף?
- היכן היה הגוף ברגע $t = 0$?
- מצאו את נוסחת מקום-זמן המתארת את תנועת הגוף.
- מתי הגוף עבר בנקודת הראשית של ציר המקום?
- מה היה העתק הגוף מרגע $t = 0$ עד רגע $t = 10$ s?

פתרון:

א ו- ב.: מהירות הגוף קבועה, לכן מתקיים הקשר: $x_0 = x + vt$. נציב בנוסחה זו את ערכי הנקודה הנתונה הראשונה, ואת ערכי הנקודה הנתונה השנייה ונקבל מערכת של שתי משוואות בשני נעלמים:

$$v + x_0 \cdot 2 = 3$$

$$v + x_0 \cdot 5 = 9$$

מהתרת מערכת שתי המשוואות נקבל כי: $x_0 = 1 - v$ או $v = 1 - x_0$.

ג. בעת יש בידינו שני הקבועים $(v - x_0)$ של נוסחת מקום-זמן ונוכל לרשום אותה בצורה מפורשת:

$$x = -v + x_0 + vt$$

ד. כדי למצוא מתי הגוף עבר בנקודת הראשית נציב בקשר (ג) $x = 0$ ונקבל:

$$s \ 0.5 = t \leq 2t + 1 = 0$$

כלומר הגוף עבר בנקודת הראשית של ציר המקום ברגע $s \ 0.5 = t$.

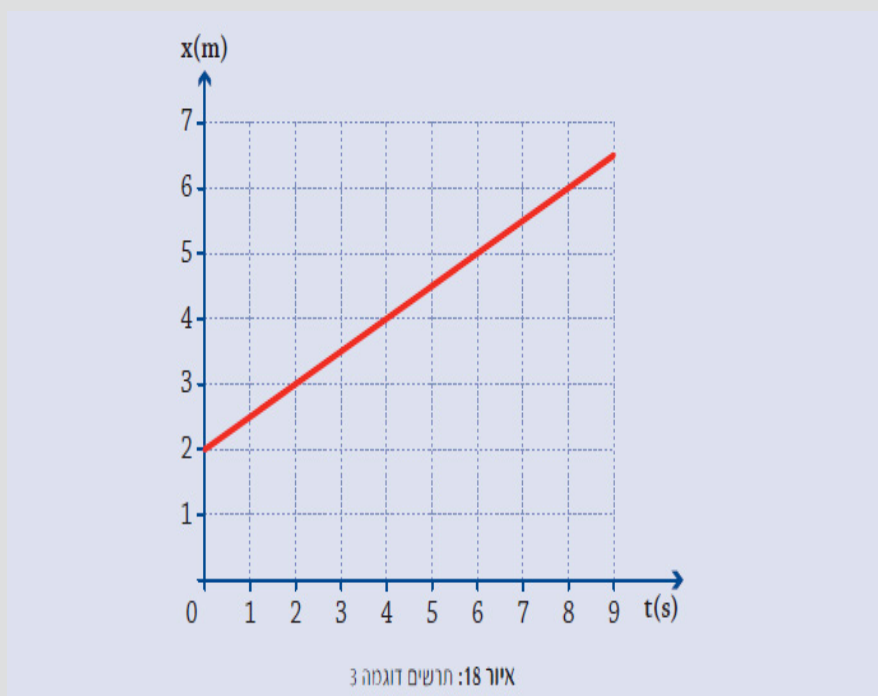
ה. ברגע $t = 0$ הגוף היה בנקודה ששיעורה $x_0 = (1-) \cdot m$. מקום הגוף, x_1 , ברגע $t = 10 \ s$ הוא:

$$m \ 19 = 10 \cdot 2 + 1- = x_1 \quad 2t + 1- = x_1$$

$$m \ 20 = (1-) - 19 = x_0 - x_1 = \Delta x \quad \text{לכן העתק הגוף:}$$

דוגמה 3: שימוש בגרף מקום-זמן

מקומו של גוף הנע לאורך קו ישר במהירות קבועה נקבע ביחס לציר מקום שכיוונו החיובי פונה צפונה. איור 18 הוא גרף מקום זמן עבור 9 השניות הראשונות של התנועה.



- א. היכן היה הגוף ברגע $t = 0$?
- ב. מתי היה הגוף בנקודה ששיעורה 5 מ'?
- ג. מהו כיוון התנועה של הגוף (צפונה או דרומה)?
- ד. מהי מהירות הגוף?
- ה. היכן יימצא הגוף ברגע $s \ 200 = t$?

פתרון:

- א. על-פי הגרף, ברגע $t = 0$ הגוף נמצא בנקודה ששיעורה $x = 2 \ m$ (נקודת חיתוך העקומה עם הציר האנכי).
- ב. על פי הגרף, הגוף היה בנקודה ששיעורה $x = 5 \ m$ ברגע $t = 6 \ s$.
- ג. מצד אחד נתון כי הכיוון החיובי של הציר x פונה צפונה. מצד שני, רואים על-פי הגרף, שככל שהזמן חולף – שיעורי ה- x הולכים וגדלים. מכאן נובע שהגוף נע צפונה.

ד. נחשב את מהירות הגוף על-פי הנקודות (0,2) ו-(8,6) הנמצאות על הקו:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{6-2}{8-0} = 0.5 \text{ m / s}$$

אפשר כמובן להשתמש בכל זוג נקודות על הקו לצורך חישוב המהירות.

ה. לא נוכל להיעזר ישירות בגרף, לכן נמצא תחילה את נוסחת מקום-זמן של תנועת הגוף:

$$t \cdot 0.5 + 2 = x \quad \text{or} \quad vt + x_0 = x$$

$$\text{נציב } m \ 102 = 200 \cdot 0.5 + 2 = x \ 200 = t \text{ s}$$

דוגמה 4: מפגש בין שתי מכוניות שכל אחת נעה במהירות קבועה

משאית יוצאת לדרכה מישוב א במהירות קבועה שגודלה 70 ק"מ לשעה אל ישוב ב. חצי שעה לאחר צאת המשאית יוצאת מונית מישוב ב לכיוון ישוב א במהירות קבועה שגודלה 100 ק"מ לשעה. המרחק בין שני הישובים הוא 290 ק"מ, והכביש המחבר ביניהם הוא ישר.

א. הגדירו ציר מקום עבור תנועת שתי המכוניות.

ענו על השאלות שלפניכם ביחס לציר שהגדרתם בתשובותיכם לסעיף א.

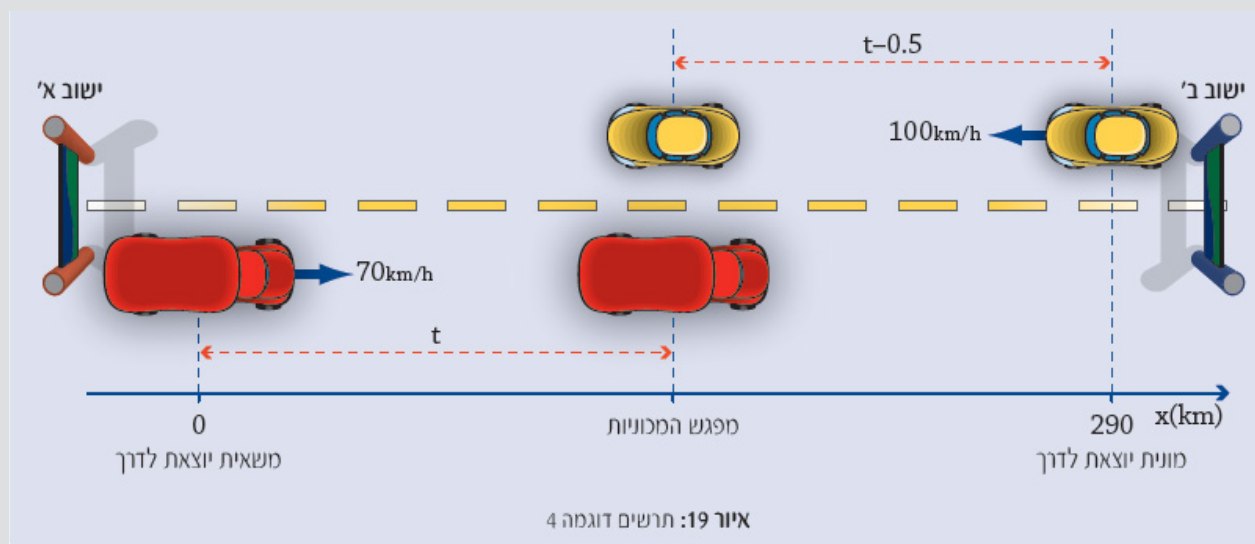
ב. כתבו נוסחת מקום-זמן עבור תנועת המשאית.

ג. כתבו נוסחת מקום-זמן עבור תנועת המונית.

ד. כמה זמן לאחר צאת המשאית לדרכה נפגשות שתי המכוניות?

פתרון:

א. תחילה נסרטט את תרשימים הבעיה (איור 19).



הגדרנו ציר מקום שראשיתו בישוב א, וכיוונו החיובי פונה אל ישוב ב. נגדיר את $t = 0$ כרגע שבו המשאית יצאה לדרכה. משך זמן תנועת המשאית, בשעות, מרגע צאתה עד לפגישה עם המונית יסומן ב- t . מכאן שמשך הזמן (בשעות) של תנועת המונית מרגע צאתה עד לפגישה עם המשאית הוא $t - 0.5$ (איור 19).

ב. תנועת המשאית היא שוות-מהירות, לכן אנו רשאים להשתמש בנוסחה (3'). נציב בה את המ-
קום, x ביחידה ק"מ (km), את הזמן, t , ביחידה שעה (h), ואת המהירות, v , ביחידה ק"מ לשעה (h/km).

$$\text{נקבל: } x = 0 + t \cdot 70 \quad \square \quad vt + x_0 = x \quad \text{משאית} \quad (\text{א})$$

ג. נשתמש בנוסחת מקום-זמן (3) עבור תנועת המונית. נציב בה: $v = 100$ h/km (המהירות שלילית כי המונית נוסעת בכיוון השלילי של ציר המקום), $x_0 = 290$ km ובמקום t נציב את הביטוי $(t - 0.5)$ כי משך תנועת המונית קטן מזה של המשאית בחצי שעה.

$$\text{נקבל: } x = 290 - 100(t - 0.5) \quad \square \quad v \cdot t + x_0 = x \quad \text{מונית} \quad (\text{ב})$$

ד. מפגש בין המכוניות מתרחש ברגע t שעבורו מתקיים $x = x$ (המשאית והמונית נמצאות ברגע זה באותו מקום, כלומר יש להן אותו ערך x). על-ידי השוואת אגף ימין של קשר (א) לעיל לאגף ימין של קשר (ב) לעיל נקבל משוואה שממנה נוכל לחשב את הערך של t שעבורו שתי המכוניות נמצאות באותו מקום.

$$\text{נכתוב, אם כן: } 70t = 290 - 100(t - 0.5) \quad (\text{ג})$$

$$\text{מהתרת המשוואה נקבל: } h \cdot 2 = t$$

כלומר שתי המכוניות נפגשות שעתיים לאחר שהמשאית יצאה לדרכה (t מסמל כזכור את משך תנועת המשאית).

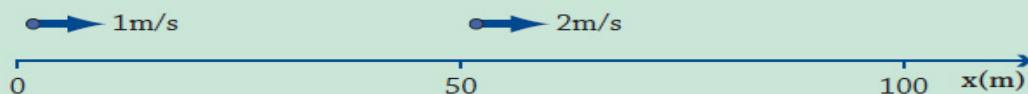
4.4 תנועה שוות-מהירות למקוטעין

א. המושג "תנועת שוות-מהירות למקוטעין"

נדון בדוגמה זו:

אדם הולך לאורך מסלול ישר שאורכו 100 m. את 50 המטרים הראשונים הוא הולך במהירות שגודלה 1 m/s, ואת 50 המטרים האחרונים במהירות שגודלה 2 m/s.

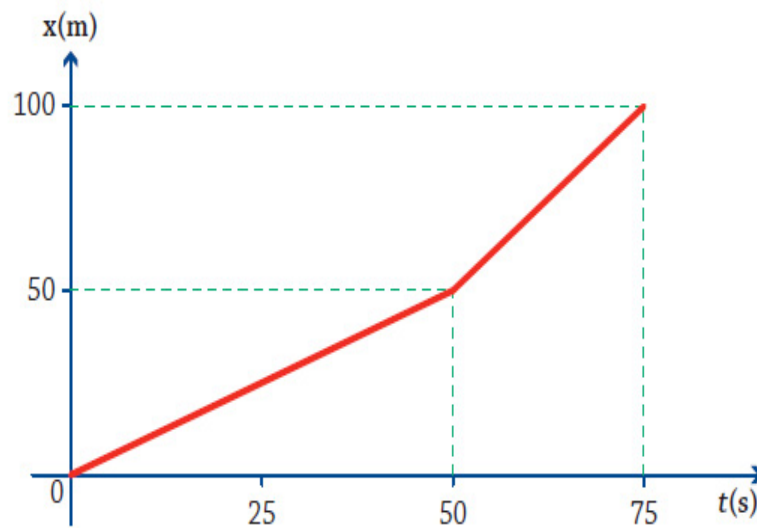
לפניכם תרשים הבעיה:



איור 20: תרשים הבעיה

את המחצית הראשונה של דרכו הוא משלים במשך: $\Delta t_1 = \frac{\Delta x_1}{v_1} = \frac{50}{1} = 50 \text{ s}$ ואת המחצית השנייה של דרכו הוא משלים במחצית הזמן הראשון: $t_2 = 25 \text{ s}$ כי מהירותו כפולה מזו שבמחצית דרכו הראשונה. תנועתו נמשכת זמן כולל של 75 שניות.

זוהי דוגמה של "תנועה שוות-מהירות למקוטעין" - תנועה שמתרחשת בסדרה של פרקי זמן (בדוגמה שלנו שניים) שבכל אחד מהם תנועת הגוף היא שוות-מהירות (איור 21).



איור 21: גרף מקום-זמן של תנועה שוות-מהירות למקוטעין

בכל אחד מפרקי הזמן שבו המהירות קבועה נוכל להשתמש בידע שרכשנו בתנועה שוות-מהירות, למרות שהתנועה בכללותה אינה שוות-מהירות.

בדוגמה הרשומה לעיל, האדם עובר מרחק של 100 מ במשך זמן כולל של 75 s.

ב. מהירות ממוצעת ב"תנועה שוות-מהירות למקוטעין"

באיזה מהירות אחת צריך אדם דימיוני ללכת לאורך כל ה-100 מ, כדי שגם הוא יעבור את המסלול ב-75 s?

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{100}{75} = 1.33 \text{ m/s}$$

התשובה פשוטה:

כלומר על האדם הדימיוני ללכת במהירות של 1.33 מ/ש. מהירות זו אינה מהירותו של האדם ("אמיתי") באף אחד משני הקטעים, אלא המהירות שהיתה לאדם הדימיוני שהיה עובר את אותו מרחק באותו זמן בתנועה שוות-מהירות אחת. מהירות זו נקראת המהירות הממוצעת.

הגדרת "המהירות הממוצעת" בתנועה שוות-מהירות למקוטעין:

כאשר גוף נע בתנועה קצובה למקוטעין, המהירות הממוצעת שלו, v , היא היחס בין העתק הכולל של הגוף לבין פרק הזמן.

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

בניסוח מתמטי:

הערה: קו המופיע מעל אות המייצגת משתנה - מסמן ערך ממוצע של המשתנה.

ל"מהירות הממוצעת" ערך בין המהירות בקטע הראשון לבין המהירות בקטע השני, אך אין זה ממוצע חשבוני פשוט.

האדם שבדוגמה לעיל הלך זמן רב יותר במהירות הנמוכה, לכן "המהירות הממוצעת" שלו קרובה יותר למהירות הנמוכה. במקרה פרטי שבו פרקי הזמן שווים המהירות הממוצעת שווה לממוצע במהירות.

דוגמה 5: תנועה שוות-מהירות למקוטעין

מכונית נוסעת מתל-אביב לירושלים במהירות שגודל 100 h/km , חונה בירושלים במשך שעה אחת, וחוזרת לתל-אביב במהירות שגודלה 50 h/km . המרחק בין הערים תל-אביב וירושלים הוא 50 km . לשם פשטות נניח כי התנועה מתנהלת לאורך מסלול ישר.

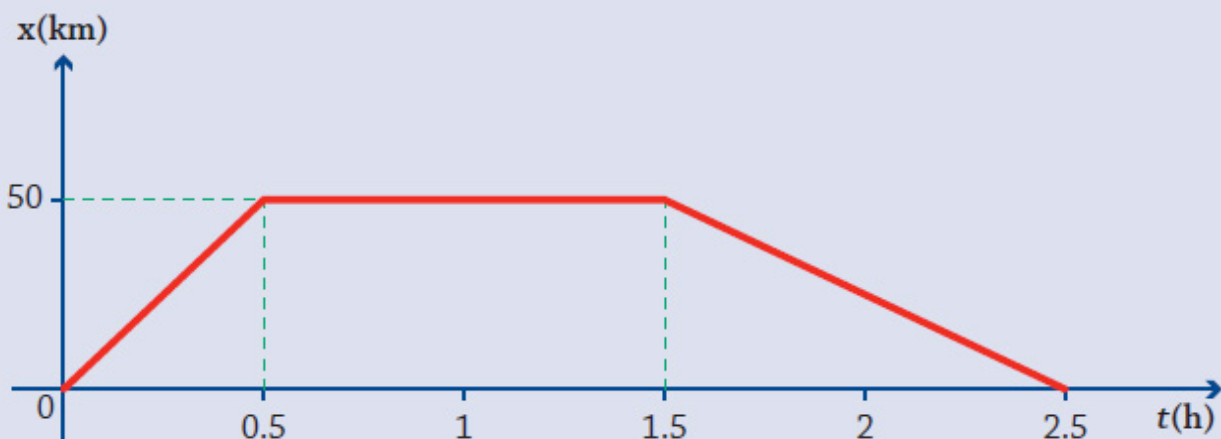
סרטטו גרף מקום-זמן של תנועת המכונית.

פתרון:

בחרנו בציר x שראשיתו בתל-אביב, וכיוונו החיובי פונה לירושלים. $t_0 = 0$ נבחר כרגע יציאת המכונית מתל-אביב.

קל לראות כי הדרך לירושלים נמשכה חצי שעה, והדרך חזרה שעה אחת. משך הזמן הכולל הוא 2.5 שעות.

גרף מקום-זמן (איור 22) מורכב משלושה קטעים שכל אחד מהם מייצג תנועה במהירות שונה. הדבר מתבטא בשיפוע שונה של כל אחד מן הקטעים.



הקטע הראשון מייצג תנועה בכיוון החיובי, לכן שיפועו חיובי. הקטע השני מייצג עמידה במקום, לכן שיפועו אפס.

הקטע השלישי מייצג נסיעה בכיוון השלילי (חזרה לתל-אביב) לכן שיפועו שלילי. הבדל נוסף בין שלושת קטעי התנועה הוא גודלי השיפועים שלהם. בקטע הראשון (מתל-אביב לירושלים) גודל השיפוע מרבי - הוא כפול מערכו המוחלט של השיפוע בדרך חזרה. דבר זה מייצג גודל מהירות כפול (100 h/km לעומת 50 h/km).