

מכניקה

שימור תנע בהתנגשויות שונות



- ◀ חוק שימור התנע הקווי
- ◀ סוגי התנגשות בין גופים:
- ◀ התנגשות פלסטית
- ◀ התנגשות אלסטית
- ◀ התנגשות לא אלסטית

שתי עגלות בעלות מסות שונות נעות על מסילה ישרה במהירויות שונות, ולאחר פרק זמן מסוים הן מתנגשות. במקרה זה מדובר **בהתנגשות מצחית**.

התנגשות מצחית היא התנגשות, שבה שני הגופים נעים, לפני ואחרי ההתנגשות, לאורך ישר המחבר את מרכזי המסה שלהם.

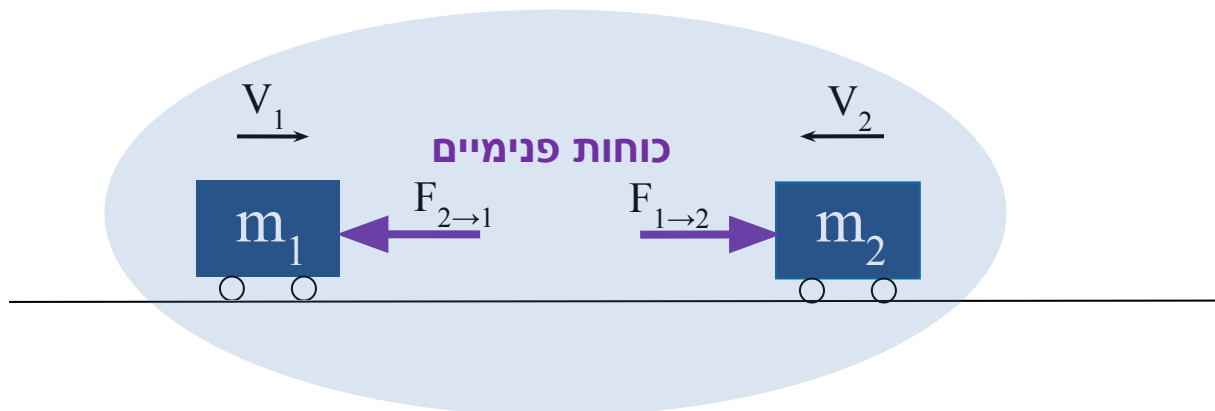
מהן המהירויות של העגלות לאחר ההתנגשות (גודל וכיוון)?

במהלך ההתנגשות, הכוחות היחידים הפועלים בכיוון התנועה הם הכוחות שהעגלות מפעילות זו על זו. כוחות אלה נקראים **כוחות פנימיים**.

מלבדם, פועלים גם כוחות חיצוניים, במקרה שלנו: כוח הכובד והכוח הנורמלי, שסכומם שווה לאפס.

מערכת כזו, שבה סכום הכוחות החיצוניים שווה לאפס, נקראת **מערכת מבודדת (סגורה)**.

הערה: מערכת בה פועלים כוחות חיכוך חיצוניים שסכומם אינו אפס אינה מערכת סגורה.



במהלך ההתנגשות, העגלות מפעילות זו על זו כוחות שווים בגודל ומנוגדים בכיוון (חוק שלישי של ניוטון).

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$

היות והכוחות פועלים במשך אותו פרק זמן, מתקיים:

$$\vec{F}_1 \cdot \Delta t = -\vec{F}_2 \cdot \Delta t$$

ולכן:

$$\Delta \vec{p}_1 = -\Delta \vec{p}_2$$

נסמן:

v_1 ו- v_2 מהירויות העגלות לפני ההתנגשות

u_1 ו- u_2 מהירותן אחרי ההתנגשות, בהתאמה

מתקיים:

$$m_1 \vec{u}_1 - m_1 \vec{v}_1 = -(m_2 \vec{u}_2 - m_2 \vec{v}_2)$$

כלומר:

$$\vec{p}_0 = \vec{p}_T$$

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2$$

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2$$

שוויון זה, לפיו סכום התנעים לפני ההתנגשות ולאחריה נשאר קבוע, מבטא חוק שימור חדש וחשוב ביותר, הידוע בשם "חוק שימור התנע הקווי".

חוק זה מתקיים תמיד במהלך כל התנגשות במערכת (מבודדת) סגורה.

מסקנה:

במהלך התנגשות בין גופים במערכת סגורה התנע הכולל נשאר קבוע.

- ❖ חוק שימור התנע הקווי הינו חוק טבע, המתקיים גם אם בהתנגשות משתתפים יותר משני גופים.
- ❖ קיים גם חוק שימור תנע עבור גופים בתנועה סיבובית, הנקרא "חוק שימור התנע הזוויתי".
- ❖ האם בשלב זה נוכל למצוא את מהירויות העגלות לאחר ההתנגשות? (**דיון**)

ישנו סוג אחד של התנגשות, שבו חוק שימור התנע מספיק כדי לחשב את מהירויות הגופים אחרי ההתנגשות. התנגשות כזו נקראת "**התנגשות פלסטית**", ומשמעותה: הגופים נצמדים לאחר ההתנגשות ונעים ביחד באותה מהירות.



נצפה בסרטון שמדגים זאת.



http://video.cet.ac.il/VideoPlayerFlash.aspx?xmlConfigPath=mafilim/2013/tihonvirtuali/hitpozezut_2_mdi.xml

◀ חלק א: שתי עגלות זהות נעות זו מול זו במהירות שווה.

- מה קרה לתנע, שהיה לכל אחת מהעגלות לפני ההתנגשות?
- האם מתקיים כאן חוק שימור התנע?
- מה קרה לאנרגיה שהייתה לכל אחת מהעגלות לפני ההתנגשות?
- האם מתקיים כאן חוק שימור האנרגיה?

◀ חלק ב: עגלה נעה ופוגעת בעגלה נחה

◀ לפני ההתנגשות:

$$\Delta x = 0.19m$$

$$\Delta t = 0.04sec$$

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{0.19}{0.04} = 4.75 \frac{m}{s}$$

◀ אחרי ההתנגשות:

$$\Delta x = 0.1m$$

$$\Delta t = 0.04sec$$

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{0.1}{0.04} = 2.5 \frac{m}{s}$$

- האם מתקיים כאן חוק שימור התנע?
- אילו הנחות יש להניח, בכדי שנוכל להשתמש בחוק שימור התנע בהדגמה זו?
- האם מתקיים כאן חוק שימור האנרגיה?
- מה קרה לאנרגיה הקינטית שנעלמה?



על פי חוק שימור התנע:

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \cdot \vec{u}$$

כאשר u היא המהירות המשותפת של הגופים לאחר ההתנגשות.

בהתנגשות פלסטית האנרגיה הקינטית אינה נשמרת. הפחת באנרגיה הקינטית שווה ל:

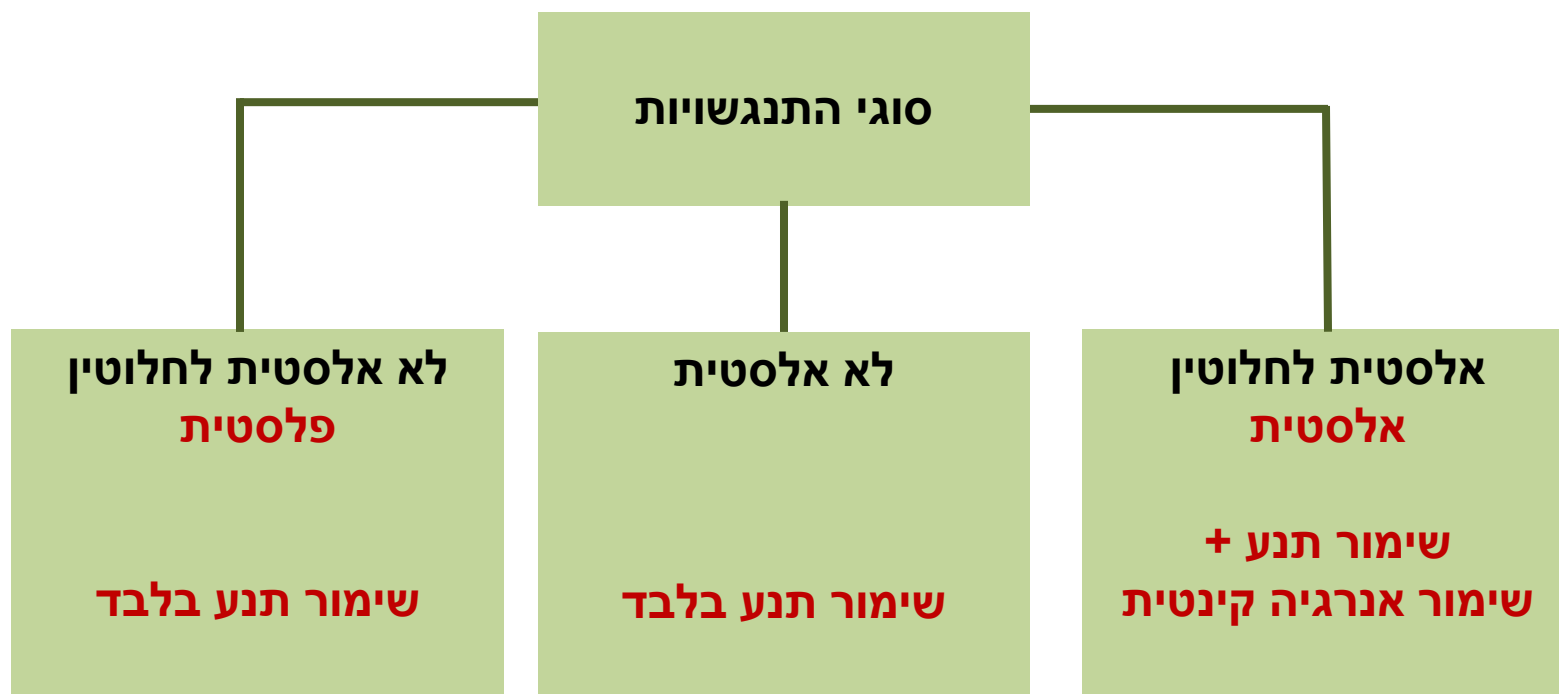
$$\Delta E_k = E_{k_T} - E_{k_o} = \left(\frac{1}{2} (m_1 + m_2) \cdot u^2 \right) - \left(\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \right)$$

מה קורה אם הגופים אינם נעים יחד באותה מהירות מיד לאחר ההתנגשות?
נבחין בין שני מקרים:

1. "התנגשות אלסטית לחלוטין", בה נשמרת האנרגיה הקינטית.

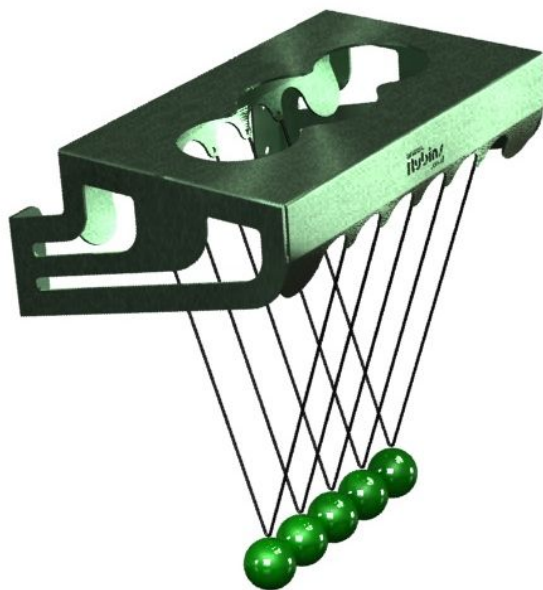
2. "התנגשות לא אלסטית", בה האנרגיה הקינטית אינה נשמרת.

נדגיש שוב שבכל סוגי ההתנגשויות במערכת סגורה מתקיים חוק שימור התנע הקווי.



התנגשות אלסטית (או **התנגשות אלסטית לחלוטין**) היא התנגשות, בה סך כל האנרגיה הקינטית של הגופים המתנגשים לאחר ההתנגשות שווה לסך כל האנרגיה הקינטית שלהם לפני ההתנגשות. מכאן שהתנגשויות אלסטיות יכולות לקרות רק אם אין המרת אנרגיה קינטית לסוגי אנרגיה אחרים (בניגוד להתנגשות פלסטית).

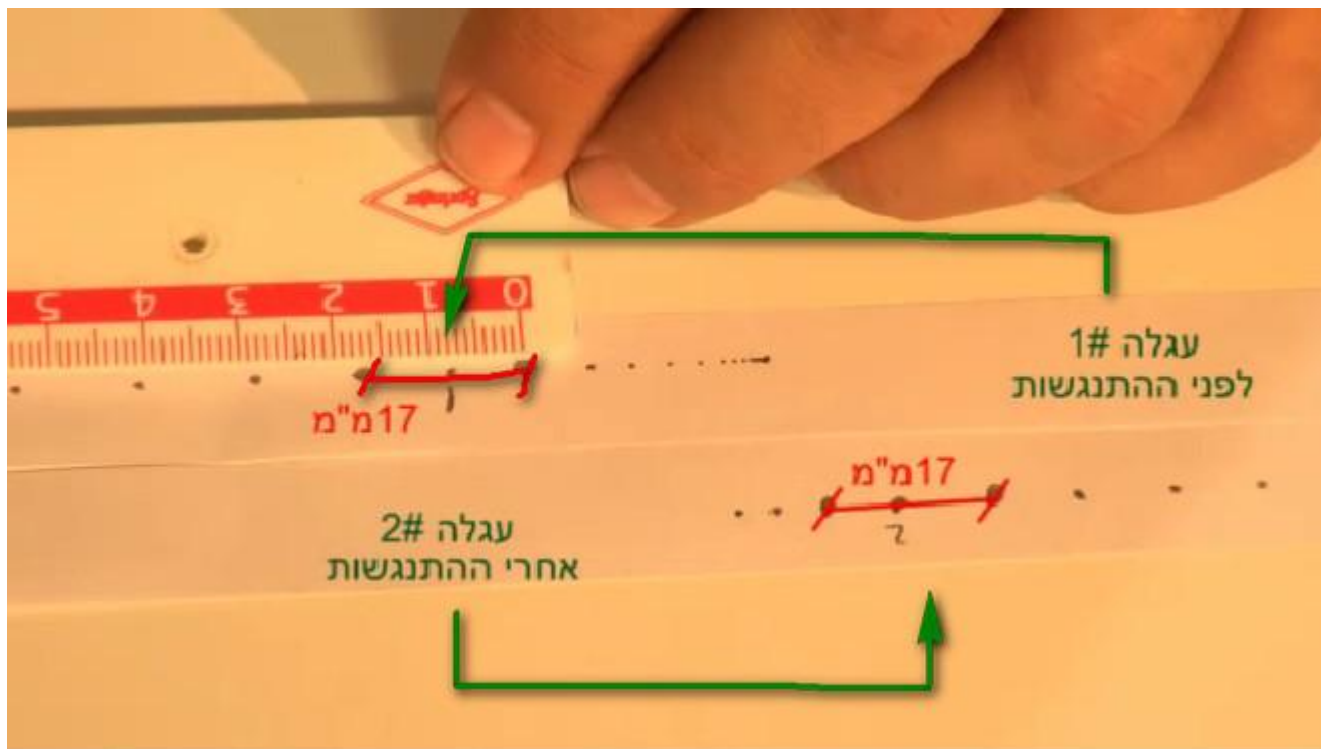
דוגמאות להתנגשות שהיא בקירוב טוב אלסטית: עריסת ניוטון מצומצמת, כדורי ביליארד. התנגשויות אלסטיות מתקיימות הרבה בעולם המיקרוסקופי. דוגמאות?





http://video.cet.ac.il/VideoPlayerFlash.aspx?xmlConfigPath=mafilim/2013/tihonvirtuali/hitpozezut_3_mdi.xml

ניתוח סרטון הדגמה- התנגשות אלסטית



שאלות לדיון: ◀

1. האם מתקיים כאן חוק שימור התנע?
2. האם מתקיים כאן חוק שימור האנרגיה?
3. אילו הנחות יש להניח כדי שנוכל להשתמש בחוק שימור האנרגיה?
4. מה קרה לאנרגיה הקינטית שנעלמה?

התנגשות פלסטית: תרגיל דוגמה כאשר $m_1 = m_2$

כדור שמסתו m נע במהירות v לעבר כדור שני זהה הנמצא במנוחה.

א. מה תהיה מהירות הכדורים לאחר ההתנגשות?

ב. כמה אנרגיה קינטית אבדה במהלך ההתנגשות?



פתרון תרגיל דוגמה כאשר $m_1 = m_2$

א. על פי חוק שימור התנע בהתנגשות פלסטית מתקיים:

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \cdot \vec{u}$$

מכאן שהביטוי למהירות המשותפת:

$$\vec{u} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{(m_1 + m_2)} = \frac{m \vec{v}_1 + m \cdot 0}{(m + m)} = \frac{\vec{v}_1}{2}$$

מסקנה: כאשר המסות שוות $m = m_1 = m_2$ והגוף הנפגע נמצא במנוחה ($v_2 = 0$), המהירות המשותפת שווה למחצית המהירות שהייתה לגוף הפוגע לפני ההתנגשות.



המשך פתרון תרגיל דוגמה כאשר $m_1=m_2$

ב. האנרגיה הקינטית של המערכת לפני ההתנגשות היא הייתה:

$$E_{k_o} = \frac{1}{2}mv^2$$

לאחר ההתנגשות האנרגיה הקינטית של המערכת היא:

$$E_{k_T} = \frac{1}{2}(m+m) \cdot u^2$$

ההפרש באנרגיות הקינטיות הוא:

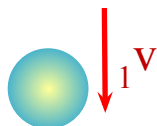
$$\Delta E_k = E_{k_T} - E_{k_o} = \left(\frac{1}{2}(m+m) \cdot u^2\right) - \left(\frac{1}{2}mv^2\right)$$

$$\Delta E_k = \left(\frac{1}{2}(m+m) \cdot \left(\frac{v}{2}\right)^2\right) - \left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \frac{1}{2}mv^2$$

מסקנה: כאשר המסות שוות $m=m_1=m_2$ והגוף הנפגע נמצא במנוחה ($v_2=0$), מחצית מהאנרגיה הקינטית אובדת.

התנגשות פלסטית: תרגיל דוגמה כאשר $m_1 \ll m_2$

כדור פלסטלינה שמסתו m_1 הנופל מגובה מסוים פוגע ברצפה במהירות v_1 , לאחר ההתנגשות הכדור נצמד לרצפה.



לפני ההתנגשות



אחרי ההתנגשות

בהנחה שמסת הפלסטלינה קטנה בהרבה ממסת כדור הארץ $m_1 \ll m_2$ מה תהיה המהירות המשותפת שלהם לאחר ההתנגשות?

התנגשות פלסטית: תרגיל דוגמה כאשר $m_1 \ll m_2$

א. על פי חוק שימור התנע בהתנגשות פלסטית מתקיים:

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \cdot \vec{u}$$

מכאן שהביטוי למהירות המשותפת:

$$\vec{u} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{(m_1 + m_2)} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \cdot 0}{(m_1 + m_2)} = \frac{m_1 \vec{v}_1}{(m_1 + m_2)}$$

נשים לב שתוצאה זו אינה יכולה להיות שווה לאפס, אולם במצב בו $m_1 \ll m_2$ נקבל:

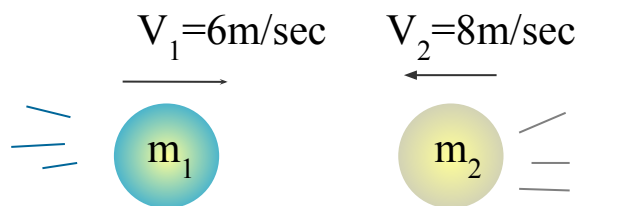
$$u = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{(m_1 + m_2)} = \frac{m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot 0}{m_2} \approx 0$$

מסקנה: כאשר המסה הפוגעת קטנה בהרבה מהמסה הנפגעת, $m_1 \ll m_2$, והמסה הנפגעת

נמצאת במנוחה ($v_2=0$), המהירות המשותפת לאחר ההתנגשות שווה בקירוב לאפס.

שני גופים מתנגשים מצחית זה בזה. הכיוון החיובי של ציר ה- x הוא בכיוון ימין.

נתון: $m_1 = 4 \text{ kg}$, $m_2 = 2 \text{ kg}$.



- א. מהו התנע הקווי הכללי של המערכת לפני ההתנגשות (גודל וכיוון)?
- ב. מהו התנע הקווי הכללי של המערכת אחרי ההתנגשות (גודל וכיוון)?
- ג. בהנחה שההתנגשות היא התנגשות פלסטית (לא- אלסטית לחלוטין):
 - (I) מהי המהירות הסופית (גודל וכיוון) של כל אחד מהכדורים?
 - (II) מהו המתקף (גודל וכיוון) שפעל על כל אחד מהכדורים?
 - (III) כמה אנרגיה קינטית אבדה בהתנגשות?

א.

$$p_0 = m_1 v_1 + m_2 v_2 = 4 \cdot 6 + 2 \cdot (-8) = 8 \text{ kg} \cdot \frac{m}{\text{sec}}$$

כיוון ימינה

$$p_0 = p_T = 8 \text{ kg} \cdot \frac{m}{\text{sec}}$$

ב. משימור תנע

ג. א.

$$m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = (m_1 + m_2) \cdot u$$

$$4 \cdot 6 + 2 \cdot (-8) = (4 + 2) \cdot u \Rightarrow u = 1.33 \frac{m}{\text{sec}} \quad \text{כיוון ימינה}$$

ב.

$$J_1 = \Delta p_1 = m_1 u_1 - m_1 v_1 = 4 \cdot 1.33 - 4 \cdot 6 = -18.66 \text{ kg} \cdot \frac{m}{\text{sec}} \quad \text{כיוון שמאלה}$$

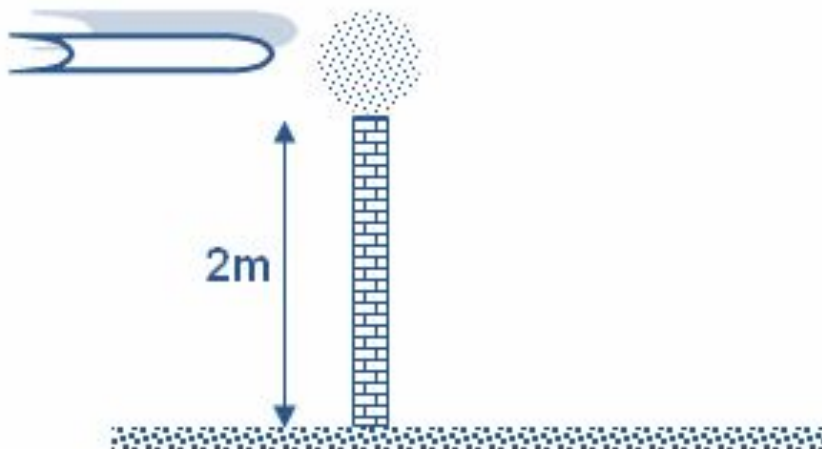
$$J_2 = \Delta p_2 = m_2 u_2 - m_2 v_2 = 2 \cdot 1.33 - 2 \cdot (-8) = 18.66 \text{ kg} \cdot \frac{m}{\text{sec}} \quad \text{כיוון ימינה}$$

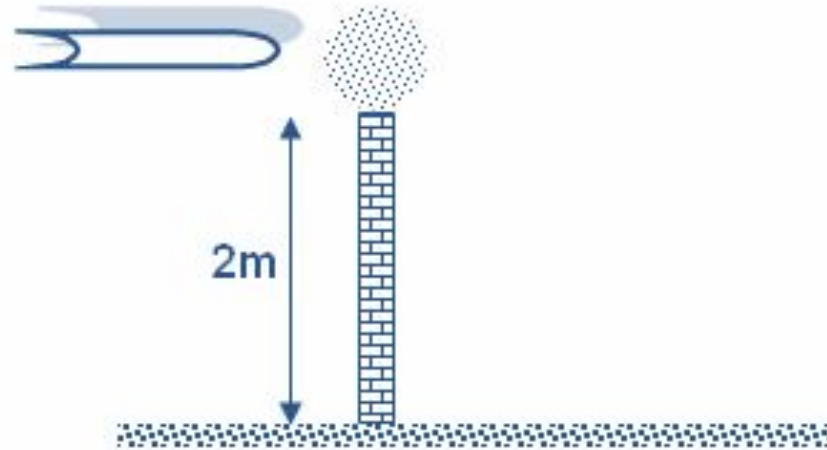
ג.

$$\Delta E_k = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \cdot u^2 - \left(\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \right)$$

$$\Delta E_k = \frac{1}{2} (4 + 2) \cdot 1.33^2 - \left(\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6^2 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 8^2 \right) = -130.69 \text{ J}$$

- כדור עץ שמסתו 875 gr , ניצב על עמוד צר המאונך לקרקע. גובה העמוד 2m .
קליע שמסתו 15 גרם נע אופקית כלפי מרכז הכדור וננעץ בו .
כדור העץ והקליע בתוכו פגעו בקרקע במרחק 2m מטר מרגלי העמוד .
מהי מהירות הקליע לפני פגיעתו בכדור העץ ?





$$m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = (m_1 + m_2) \cdot u$$

$$0.015 \cdot v_1 + 0.875 \cdot 0 = (0.015 + 0.875) \cdot u$$

$$y_t = y_0 + v_0 \cdot t + \frac{g \cdot t^2}{2} \Rightarrow 2 = 5t^2 \Rightarrow t = 0.632 \text{ sec}$$

$$x_t = x_0 + v_{0x} \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2} \Rightarrow 2 = u \cdot 0.632 \Rightarrow u = 3.16 \frac{m}{\text{sec}}$$

$$0.015 \cdot v_1 + 0.875 \cdot 0 = (0.015 + 0.875) \cdot 3.16 \Rightarrow v_1 = 187.49 \frac{m}{\text{sec}}$$

קליע שמסתו 10gr נע במהירות 150 m/sec ונתקע בבול עץ שמסתו 4 kg, הקשור לקפיץ שקבוע הקפיץ שלו 100 N/m.



- א. מהו הכיוון המקסימאלי של הקפיץ, אם נתון שהמשטח חלק?
- ב. מהו הכיוון המקסימאלי של הקפיץ, אם מקדם החיכוך הקינטי שווה ל- 0.2?

א.



$$m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = (m_1 + m_2) \cdot u$$

$$0.01 \cdot 150 + 4 \cdot 0 = (0.01 + 4) \cdot u \Rightarrow u = 0.374 \frac{m}{sec}$$

$$\frac{1}{2} (m_1 + m_2) \cdot u^2 = \frac{1}{2} kx^2$$

$$\frac{1}{2} (0.01 + 4) \cdot 0.374^2 = \frac{1}{2} 100x^2 \Rightarrow x = 0.0749m$$

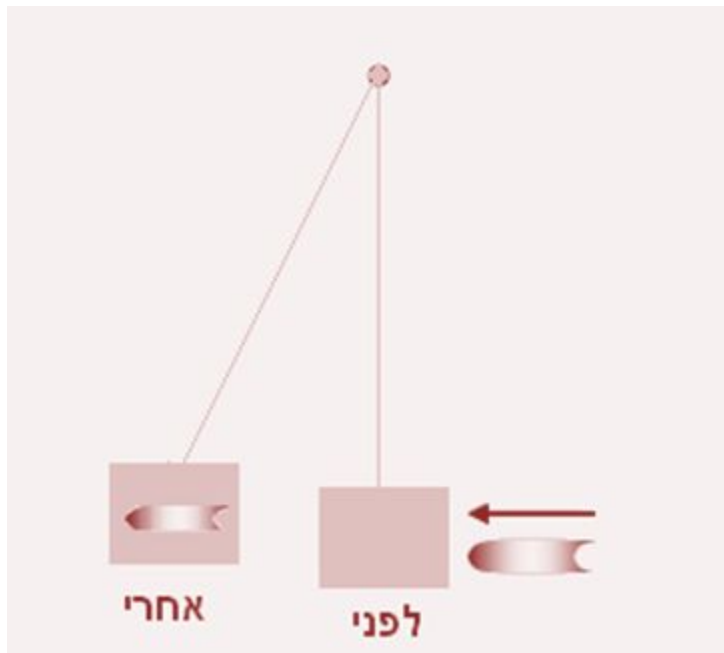
$$W_{f_k} = \frac{1}{2} kx^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \cdot u^2$$

ב.

$$(m_1 + m_2) \cdot g \cdot \mu_k \cdot x' \cdot \cos 180 = \frac{1}{2} kx'^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \cdot u^2$$

$$(0.01 + 4) \cdot g \cdot 0.2 \cdot x' \cdot (-1) = \frac{1}{2} 100x'^2 - \frac{1}{2} (0.01 + 4) \cdot 0.374^2 \Rightarrow x' = 0.029m$$

במטוטלת בליסטית יורים קליע שמסתו $gr20$ לעבר בול עץ שמסתו $gr480$.
כתוצאה מפגיעת הקליע עלה בול העץ לגובה של 1 cm .



- מהי מהירות הכניסה של הקליע, אם ידוע שהקליע נשאר בבול העץ?
- מהו הפחת באנרגיה הקינטית בכל תהליך ההתנגשות?

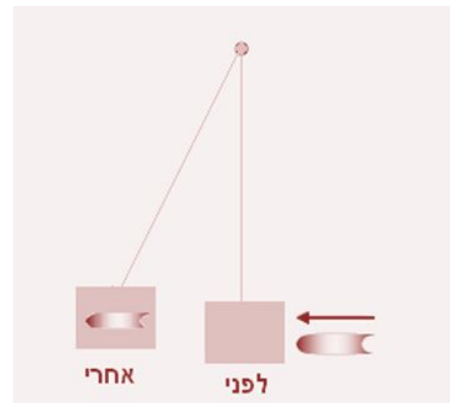
א.

$$m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = (m_1 + m_2) \cdot u$$

$$0.02 \cdot v_1 + 0.48 \cdot 0 = (0.02 + 0.48) \cdot u$$

$$\frac{1}{2} (m_1 + m_2) \cdot u^2 = (m_1 + m_2) \cdot g \cdot h$$

$$\frac{1}{2} (0.02 + 0.48) \cdot u^2 = (0.02 + 0.48) \cdot g \cdot 0.01 \Rightarrow u = 0.447 \frac{m}{sec}$$



$$0.02 \cdot v_1 + 0.48 \cdot 0 = (0.02 + 0.48) \cdot 0.447 \Rightarrow v_1 = 11.18 \frac{m}{sec}$$

$$\Delta E_k = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \cdot u^2 - \left(\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \right)$$

ב.

$$\Delta E_k = \frac{1}{2} (0.02 + 0.48) \cdot 0.447^2 - \left(\frac{1}{2} \cdot 0.02 \cdot 11.18^2 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 0^2 \right) = -1.199 J$$

נתבונן בהתנגשות אלסטית בין שני גופים שמהירויותיהם לפני ההתנגשות v_1 ו- v_2 , ולאחר ההתנגשות

$$u_1 \text{ ו- } u_2.$$



משימור תנע קווי נקבל:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2$$

בנוסף, משימור אנרגיה קינטית נקבל:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}$$

קיבלנו מערכת של שתי משוואות עם שני נעלמים $(u_1 - u_2)$.

נרשום את משוואת שימור התנע באופן הבא:

$$m_1(\underline{v}_1 - \underline{u}_1) = m_2(\underline{u}_2 - \underline{v}_2)$$

באופן דומה נרשום את משוואת שימור האנרגיה הקינטית:

$$m_1(v_1^2 - u_1^2) = m_2(u_2^2 - v_2^2)$$

נחלק את המשוואה השנייה במשוואה הראשונה ונשתמש בזהות המתמטית:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

נקבל:

$$\underline{v}_1 + \underline{u}_1 = \underline{u}_2 + \underline{v}_2$$

כלומר:

$$\underline{v}_1 - \underline{v}_2 = -(\underline{u}_1 - \underline{u}_2)$$

הביטויים $(u_1 - u_2)$, $v_1 - v_2$ מבטאים את המהירות של גוף 1 יחסית לגוף 2 לפני ואחרי ההתנגשות, בהתאמה, מכאן :

בהתנגשות אלסטית, המהירות היחסית בין הגופים לפני ההתנגשות שווה בגודלה והפוכה בכיוונה למהירות היחסית ביניהם לאחר ההתנגשות.

$$v_1 - v_2 = -(u_1 - u_2)$$

עבור התנגשות אלסטית ניתן, אם כן, להשתמש בזוג המשוואות, המבטאות את שני חוקי השימור:

$$\begin{cases} m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2 \\ v_1 - v_2 = -(u_1 - u_2) \end{cases}$$

התנגשות אלסטית: תרגיל דוגמה כאשר $m_1 = m_2$

שתי עגלות זהות שמסתן m נעות על מסילה ומתנגשות אלסטית. מיהירויותיהם לפני ההתנגשות הן:

$$v_1 \text{ ו- } v_2, \text{ ולאחר ההתנגשות } u_1 \text{ ו- } u_2.$$



א. מצאו ביטוי למהירויות העגלות לאחר ההתנגשות.

ב. מצאו ביטוי למהירויות העגלות לאחר ההתנגשות בהנחה שהעגלה הנפגעת הייתה בהתחלה במנוחה (מקרה פרטי).

פתרון: א. עבור התנגשות אלסטית ניתן להשתמש בזוג המשוואות, המבטאות את שני חוקי השימור:

$$\begin{cases} m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2 \\ \vec{v}_1 - \vec{v}_2 = -(\vec{u}_1 - \vec{u}_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} m \vec{v}_1 + m \cdot \vec{v}_2 = m \vec{u}_1 + m \vec{u}_2 \\ \vec{v}_1 - \vec{v}_2 = -(\vec{u}_1 - \vec{u}_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 \\ \vec{v}_1 - \vec{v}_2 = -(\vec{u}_1 - \vec{u}_2) \end{cases} \Rightarrow \vec{u}_2 = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 + \vec{u}_1$$

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 + \vec{v}_2 &= \vec{u}_1 + (\vec{v}_1 - \vec{v}_2 + \vec{u}_1) \\ \vec{u}_1 &= \vec{v}_2 \end{aligned}$$

$$\vec{u}_2 = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 + \vec{u}_1 = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 + \vec{v}_2 = \vec{v}_1$$

מסקנה: כאשר שתי מסות זהות מתנגשות אלסטית, לאחר ההתנגשות הגופים "מחליפים" ביניהם את

המהירויות.

המשך פתרון תרגיל דוגמה $m_1=m_2$

ב.

$$\begin{cases} m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2 \\ v_1 - v_2 = -(u_1 - u_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} m v_1 + m \cdot 0 = m u_1 + m u_2 \\ v_1 - 0 = -(u_1 - u_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_1 = u_1 + u_2 \\ v_1 = -(u_1 - u_2) \end{cases} \Rightarrow u_1 + u_2 = -(u_1 - u_2) \Rightarrow u_1 = 0$$

$$\begin{aligned} v_1 &= u_1 + u_2 = 0 + u_2 \\ u_2 &= v_1 \end{aligned}$$



לפני ההתנגשות

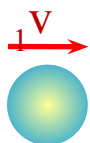
אחרי ההתנגשות

מסקנה: כאשר שתי מסות זהות מתנגשות אלסטית ואחת מהן הייתה במנוחה לפני ההתנגשות, לאחר ההתנגשות הגוף הפוגע נעצר והגוף הנח נע במהירות v_1 .

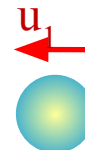
שימו לב: זהו למעשה מקרה פרטי של סעיף א וניתן להגיע לפתרו ע"י הצבת "0" בתוצאה הקודמת.

התנגשות אלסטית: תרגיל דוגמה כאשר $m_1 \ll m_2$

כדור שמסתו m_1 נע ימינה במהירות v_1 על משטח חלק ומתנגש אלסטית בקיר.



לפני ההתנגשות



אחרי ההתנגשות

מצאו ביטוי למהירויות הכדור והקיר לאחר ההתנגשות בהנחה שמסת הכדור קטנה בהרבה ממסת כדור הארץ $m_1 \ll m_2$.

פתרון:

א. עבור התנגשות אלסטית ניתן להשתמש בזוג המשוואות, המבטאות את שני חוקי השימור:

$$\begin{cases} m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2 \\ \vec{v}_1 - \vec{v}_2 = -(\vec{u}_1 - \vec{u}_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1 \vec{v}_1 + m_2 \cdot 0 = m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2 \\ \vec{v}_1 - 0 = -(\vec{u}_1 - \vec{u}_2) \Rightarrow \vec{u}_2 = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 + \vec{u}_1 \end{cases}$$

$$m_1 \vec{v}_1 = m_1 \vec{u}_1 + m_2 (\vec{v}_1 - \vec{v}_2 + \vec{u}_1)$$

$$\vec{u}_1 = \frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)} \vec{v}_1 + \frac{2m_2}{(m_1 + m_2)} \vec{v}_2$$

כאשר: $m_1 \ll m_2$ וגם: $v_2 = 0$ מתקבל:

$$\vec{u}_1 = \frac{-m_2 \cdot \vec{v}_1}{m_2} = -\vec{v}_1$$

מסקנה: מהירות הגוף הקל הפוגע תהיה שווה בגודלה והפוכה בכיוונה למהירות פגיעתו.

המשך פתרון תרגיל דוגמה $m_1 \ll m_2$

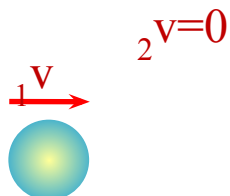
באותו אופן:

$$u_2 = \frac{(m_2 - m_1)}{(m_1 + m_2)} v_2 + \frac{2m_1}{(m_1 + m_2)} v_1$$

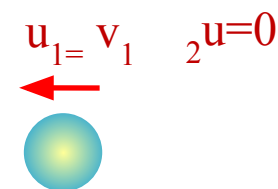
כאשר: $m_1 \ll m_2$ וגם: $v_2 = 0$ מתקבל:

$$u_2 = \frac{2m_1 v_1}{m_2} \approx 0$$

מסקנה: הגוף הכבד (הנפגע) יישאר במנוחה.



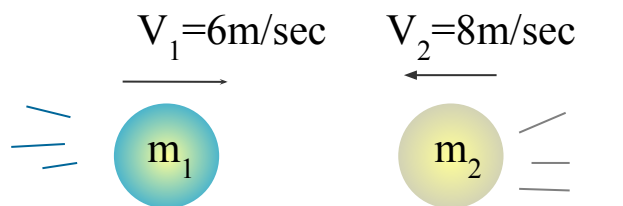
לפני ההתנגשות



אחרי ההתנגשות

שני גופים מתנגשים מצחית זה בזה. הכיוון החיובי של ציר ה- x הוא בכיוון ימין.

נתון: $m_1 = 4 \text{ kg}$, $m_2 = 2 \text{ kg}$.



- א. מהו גודל המהירות היחסית בין הגופים לפני ההתנגשות?
- ב. מהו גודל המהירות היחסית בין הגופים לאחר ההתנגשות?
- ג. בהנחה שההתנגשות היא התנגשות אלסטית (אלסטית לחלוטין):
 - (I) מהי המהירות הסופית (גודל וכיוון) של כל אחד מהכדורים?
 - (II) מהו המתקף (גודל וכיוון) שפעל על כל אחד מהכדורים?
 - (III) כמה אנרגיה קינטית אבדה בהתנגשות?

א.

$$v_{1,2} = v_1 - v_2 = 6 - (-8) = 14 \frac{m}{sec}$$

ב. בהתנגשות אלסטית המהירות היחסית לאחר ההתנגשות שווה בגודלה למהירות היחסית לאחר ההתנגשות.

$$|v_{1,2}| = |u_{1,2}| = 14 \frac{m}{sec}$$

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2$$

$$v_1 - v_2 = -(u_1 - u_2) \quad \text{ג. I.}$$

$$4 \cdot 6 + 2 \cdot (-8) = 4 \cdot u_1 + 2 \cdot u_2$$

$$6 - (-8) = -(u_1 - u_2)$$

$$u_2 = 10.67 \frac{m}{sec}, u_1 = -3.33 \frac{m}{sec}$$

$$J_1 = \Delta p_1 = m_1 u_1 - m_1 v_1 = 4 \cdot (-3.33) - 4 \cdot 6 = -37.33 kg \cdot \frac{m}{sec} \quad \text{II.}$$

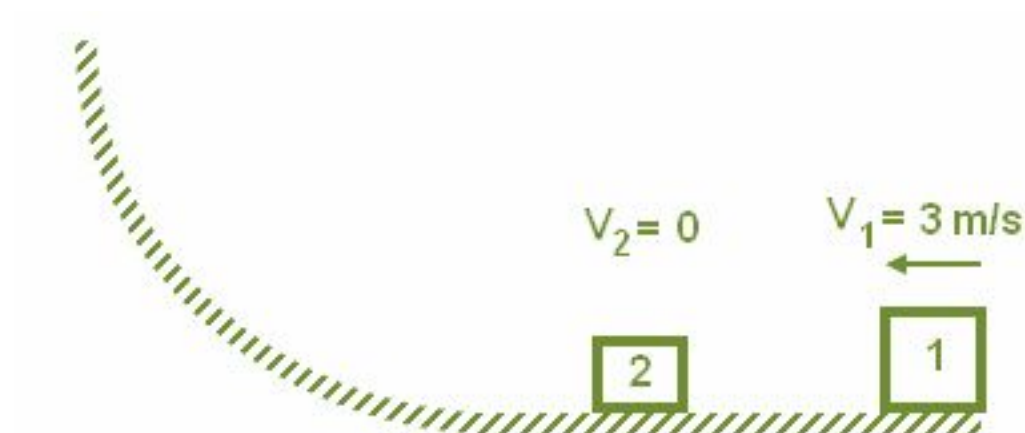
$$J_2 = \Delta p_2 = m_2 u_2 - m_2 v_2 = 2 \cdot 10.67 - 2 \cdot (-8) = 37.33 kg \cdot \frac{m}{sec}$$

III. בהתנגשות אלסטית האנרגיה הקינטית נשמרת.

מסה של $m_1=4\text{kg}$ נעה על משטח חלק במהירות של $V_1=3\text{m/sec}$ ופוגעת במסה שניה עומדת $m_2=2\text{kg}$ מהו הגובה אליו תעלה המסה של 2kg בהנחה ש:

א. ההתנגשות אלסטית.

ב. ההתנגשות פלסטית.



א.

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2$$

$$v_1 - v_2 = -(u_1 - u_2)$$

$$4 \cdot 3 + 2 \cdot 0 = 4 \cdot u_1 + 2 \cdot u_2$$

$$3 - 0 = -(u_1 - u_2)$$

$$u_2 = 4 \frac{m}{sec}, u_1 = 1 \frac{m}{sec}$$

פתרון מערכת המשוואות נותן:

$$\frac{1}{2} m_2 \cdot u_2^2 = m_2 \cdot g \cdot h_2 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot 4^2 = g \cdot h_2 \Rightarrow h_2 = 0.8m$$

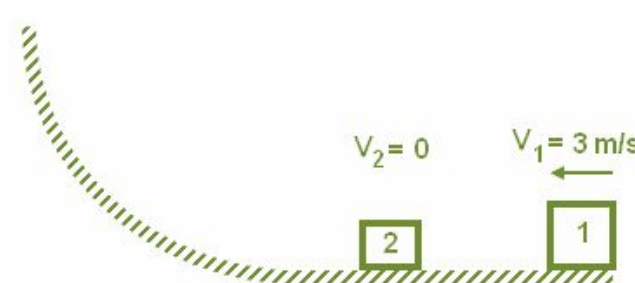
ב.

$$m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = (m_1 + m_2) \cdot u$$

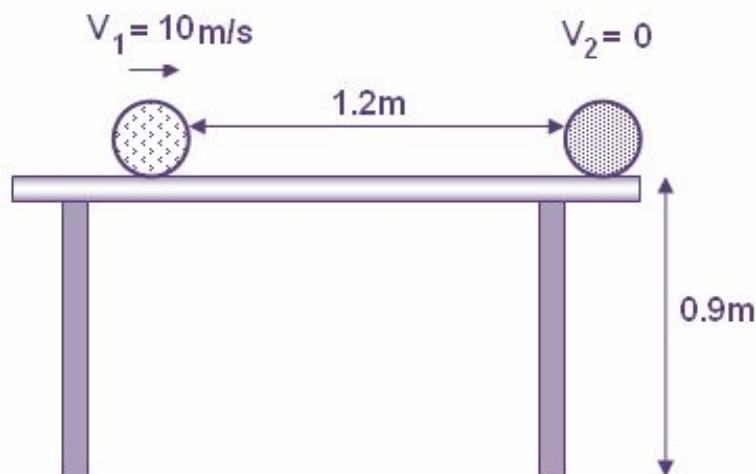
$$4 \cdot 3 + 2 \cdot 0 = (4 + 2) \cdot u \Rightarrow u = 2 \frac{m}{sec}$$

$$\frac{1}{2} (m_1 + m_2) \cdot u^2 = (m_1 + m_2) \cdot g \cdot h$$

$$\frac{1}{2} (4 + 2) \cdot 2^2 = (4 + 2) \cdot g \cdot h \Rightarrow h = 0.2m$$



כדור שמסתו $m_1 = 0.8 \text{ kg}$ מקבל מהירות התחלתית של 10 m/sec על שולחן שגובהו 0.9 m , לעבר כדור שני שמסתו $m_2 = 0.4 \text{ kg}$, הנמצא במרחק 1.2 m ממנו. הכדור השני נמצא במנוחה. כתוצאה מההתנגשות המצחית ביניהם, נופל הכדור שמסתו $m_2 = 0.4 \text{ kg}$ מהשולחן ופוגע בקרקע.



- מהו המרחק האופקי בין קצה השולחן ונקודת פגיעתו בקרקע, בכל אחד מהמקרים הבאים:
- המשטח חלק וההתנגשות אלסטית.
 - המשטח אינו חלק ומקדם החיכוך הקינטי שווה ל- 0.1 , ההתנגשות היא אלסטית.

א.

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2$$

$$v_1 - v_2 = -(u_1 - u_2)$$

$$0.8 \cdot 10 + 0.4 \cdot 0 = 4 \cdot u_1 + 2 \cdot u_2$$

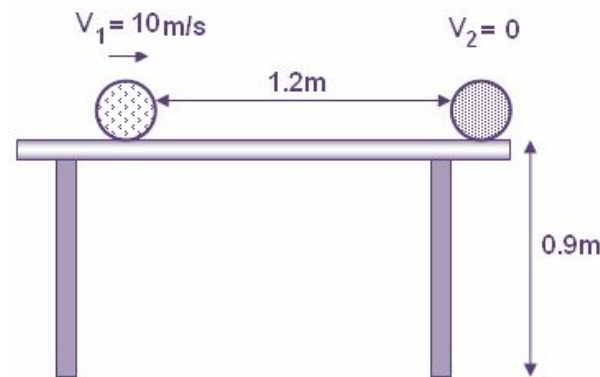
$$10 - 0 = -(u_1 - u_2)$$

פתרון מערכת המשוואות נותן:

$$u_2 = 10 \frac{m}{sec}, u_1 = 0 \frac{m}{sec}$$

$$y_t = y_0 + v_0 \cdot t + \frac{g \cdot t^2}{2} \Rightarrow 0.9 = 5t^2 \Rightarrow t = 0.424 \text{ sec}$$

$$x_t = x_0 + v_{0x} \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2} \Rightarrow x_t = 10 \cdot 0.424 \Rightarrow x_t = 4.24 \text{ m}$$



ב. נמצא את המהירות לפני ההתנגשות:

$$W_{f_k} = \Delta E_{k1} = m_1 \cdot g \cdot \mu_k \cdot x \cdot \cos 180 = \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v_1^2 - \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_0^2$$

$$0.8 \cdot g \cdot 0.1 \cdot 1.2 \cdot (-1) = \frac{1}{2} \cdot 0.8 \cdot 10^2 - \frac{1}{2} \cdot 0.8 \cdot v_1^2 \Rightarrow v_1 = 9.879 \frac{m}{sec}$$

המשך

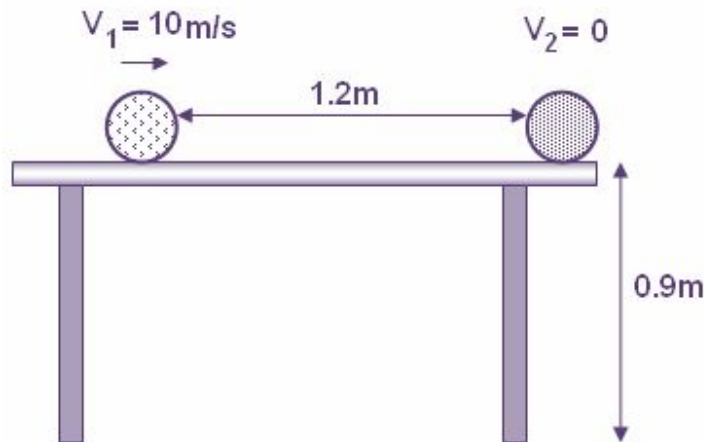
$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2$$

$$0.8 \cdot 9.879 + 0.4 \cdot 0 = 4 \cdot u_1 + 2 \cdot u_2$$

$$v_1 - v_2 = -(u_1 - u_2)$$

$$9.879 - 0 = -(u_1 - u_2)$$

פתרון מערכת המשוואות נותן:



$$u_2 = 9.879 \frac{\text{m}}{\text{sec}}, u_1 = 0 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$$

$$y_t = y_0 + v_0 \cdot t + \frac{g \cdot t^2}{2} \Rightarrow 0.9 = 5t^2 \Rightarrow t = 0.424 \text{ sec}$$

$$x_t = x_0 + v_{0x} \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2} \Rightarrow x_t = 9.879 \cdot 0.424 \Rightarrow x_t = 4.188 \text{ m}$$

גוף A שמסתו 5kg נמצא במנוחה על משטח אופקי חלק כשהוא מחובר לקפיץ רפוי שקבוע הכוח שלו הוא $50,000\text{N/m}$. גוף B שמסתו 5kg נע שמאלה במהירות 10m/sec לעבר הגוף A, ומתנגש בו בהתנגשות אלסטית.



- א. מהן מהירויות שני הגופים לאחר ההתנגשות?
- ב. בכמה יתכווץ הקפיץ?

א.

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2$$

$$5 \cdot 10 + 5 \cdot 0 = 5 \cdot u_1 + 5 \cdot u_2$$

$$v_1 - v_2 = -(u_1 - u_2)$$

$$10 - 0 = -(u_1 - u_2)$$

$$u_2 = 10 \frac{m}{sec}, u_1 = 0 \frac{m}{sec}$$

פתרון מערכת המשוואות נותן:

$$\frac{1}{2} m_2 \cdot u_2^2 = \frac{1}{2} kx^2$$

$$\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 10^2 = \frac{1}{2} \cdot 50000 \cdot x^2 \Rightarrow x = 0.1m$$

ב.



כאמור, בהתנגשות **לא אלסטית** יש שימור תנע אך אין שימור אנרגיה.

לכן נשתמש רק בנוסחה הבאה:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2$$

כאלה הן התנגשויות של קליע החודר לבול עץ ואח"כ יוצא מצדו השני במהירות הקטנה ממהירות חדירתו.



הערה: שימו לב שבמקרה זה כוח החיכוך הוא כוח פנימי, הפועל בתוך המערכת.

קליע שמסתו 5 gr פוגע אופקית במהירות שגודלה 500 m/sec בגוש עץ שמסתו 2 kg, המונח על משטח אופקי. הקליע יוצא מצדו השני של גוש העץ במהירות 100 m/sec וגוש העץ מחליק על המשטח מרחק של 25cm עד עצירתו. בהנחת הקירוב שגוש העץ החל לנוע רק לאחר שהקליע יצא ממנו, חשבו את מקדם החיכוך בין גוש העץ למשטח.



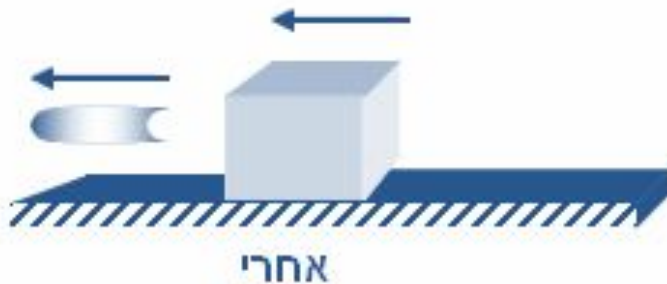
משימור תנע:

$$m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = m_1 \cdot u_1 + m_2 \cdot u_2$$

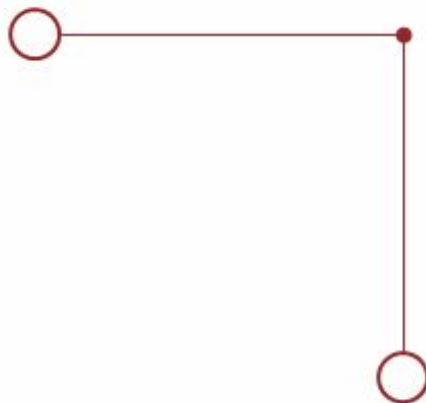
$$0.005 \cdot 500 + 2 \cdot 0 = 0.005 \cdot 100 + 2 \cdot u_2 \Rightarrow u_2 = 1 \frac{m}{sec}$$

$$W_{f_k} = \Delta E_{k2} = m_2 \cdot g \cdot \mu_k \cdot x \cdot \cos 180 = 0 - \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot u_2^2$$

$$2 \cdot g \cdot \mu_k \cdot 0.25 \cdot (-1) = 0 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1^2 \Rightarrow \mu_k = 0.2$$



כדור שמסתו m וקשור לחוט שאורכו $0.8m$ מוסט בזווית 90° ומשוחרר.
בתחתית מסלולו הוא מתנגש בכדור שני, ניח, שמסתו זהה.
ההתנגשות לא אלסטית ומהירות הכדור הימני לאחר ההתנגשות, היא $3m/sec$.



- א. מהי מהירות הכדור הפוגע אחרי ההתנגשות?
- ב. מהי זווית הסטייה המקסימלית של כל אחד מהכדורים?

א.

$$m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = m_1 \cdot u_1 + m_2 \cdot u_2$$

$$m \cdot v_1 + m \cdot v_2 = m \cdot u_1 + m \cdot u_2 \Rightarrow v_1 = u_1 + u_2$$

$$\frac{1}{2} m_1 \cdot v_1^2 = m_1 \cdot g \cdot h \Rightarrow v_1 = \sqrt{2 \cdot g \cdot h} = \sqrt{2 \cdot g \cdot 0.8} = 4 \frac{m}{sec}$$

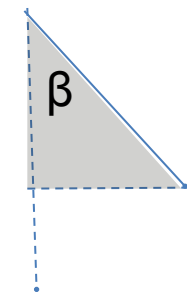
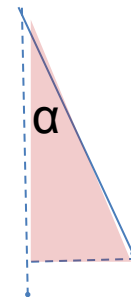
$$v_1 = u_1 + u_2 \Rightarrow 4 = u_1 + 3 \Rightarrow u_1 = 1 \frac{m}{sec}$$

$$\frac{1}{2} m_1 \cdot u_1^2 = m_1 \cdot g \cdot h_1 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot 1^2 = g \cdot h_1 \Rightarrow h_1 = 0.05m$$

$$\frac{1}{2} m_2 \cdot u_2^2 = m_2 \cdot g \cdot h_2 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot 2^2 = g \cdot h_2 \Rightarrow h_2 = 0.2m$$

$$h_1 = l - l \cos \alpha \Rightarrow 0.05 = 0.8 - 0.8 \cos \alpha \Rightarrow \alpha = 20.36^\circ$$

$$h_2 = l - l \cos \beta \Rightarrow 0.2 = 0.8 - 0.8 \cos \beta \Rightarrow \beta = 41.4^\circ$$



ב.

❖ התנע הכולל של מערכת גופים סגורה נשאר קבוע בזמן ההתנגשות בין הגופים.

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2$$

❖ בהתנגשות **פלסטית** הגופים נצמדים לאחר ההתנגשות ונעים ביחד באותה מהירות.

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \cdot \vec{u}$$

הפחת באנרגיה הקינטית שווה ל:

$$\Delta E_k = E_{k_T} - E_{k_o} = \left(\frac{1}{2} (m_1 + m_2) \cdot u^2 \right) - \left(\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \right)$$

❖ בהתנגשות **אלסטית** האנרגיה הקינטית של מערכת הגופים לפני ולאחר ההתנגשות נשמרת.

$$\begin{cases} m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2 \\ \vec{v}_1 - \vec{v}_2 = -(\vec{u}_1 - \vec{u}_2) \end{cases}$$

❖ בהתנגשות **לא אלסטית** הגופים לאחר ההתנגשות נעים **בנפרד**.

האנרגיה הקינטית קטנה לאחר ההתנגשות.

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2$$

הפחת באנרגיה הקינטית שווה ל:

$$\Delta E_k = \left(\frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2 \right) - \left(\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \right)$$