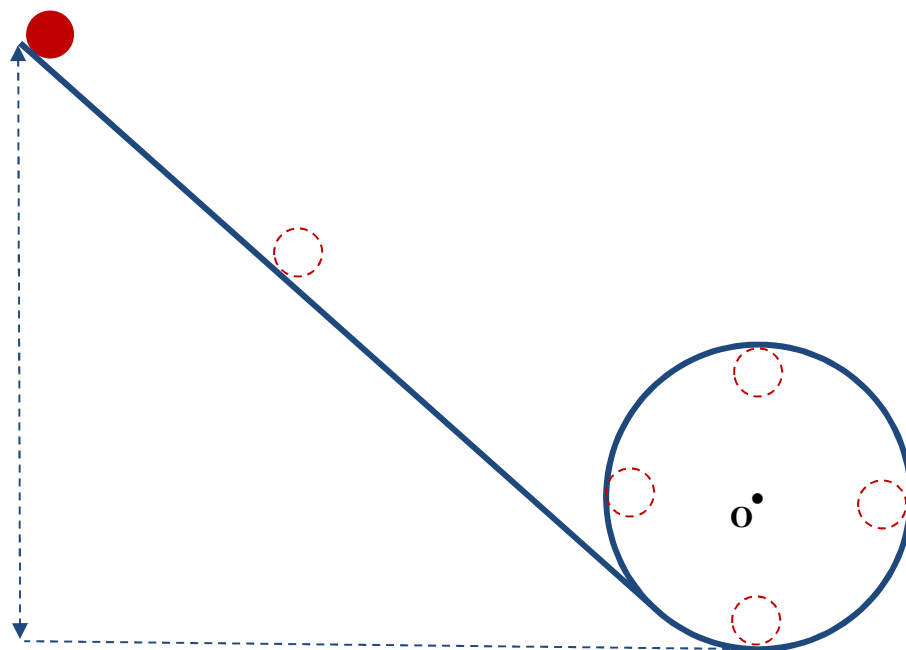


מכניקה

תנועה במעגל אנכי (זקוף)



- ▶ ניתוח כוחות בכיוון הרדיאלי בתנועה במעגל אנכי
- ▶ מציאת המהירות הקריטית
- ▶ ניתוח כוחות בכיוון המשיק בתנועה במעגל אנכי
- ▶ תאוצה שקולה במעגל אנכי

הדגמת תנועה במעגל אנכי

לפנינו מסילה המדמה רכבת הרים. נשחרר כדור מנקודה הנמצאת בגובה מסוים בחלקה המשופע של המסילה. מה לדעתכם יתרחש?



מה לדעתכם נדרש כדי שהכדור ישלים מעגל שלם?

צפו בסרטון (נמצא גם באתר הקורס):

<http://video.mit.edu/watch/loop-the-loop-6813/>

המשך הדגמת תנועה במעגל אנכי

נבצע שוב את ההדגמה כשבכל פעם נגדיל את גובה השחרור עד שנגיע לקצה העליון של המסילה.



מסקנה:

הדרישה שהכדור ישלים מעגל שלם תלויה בגובה ההתחלתי ממנו שוחרר הכדור,
כלומר באנרגיה הפוטנציאלית שלו.

דיון בעקבות ההדגמות

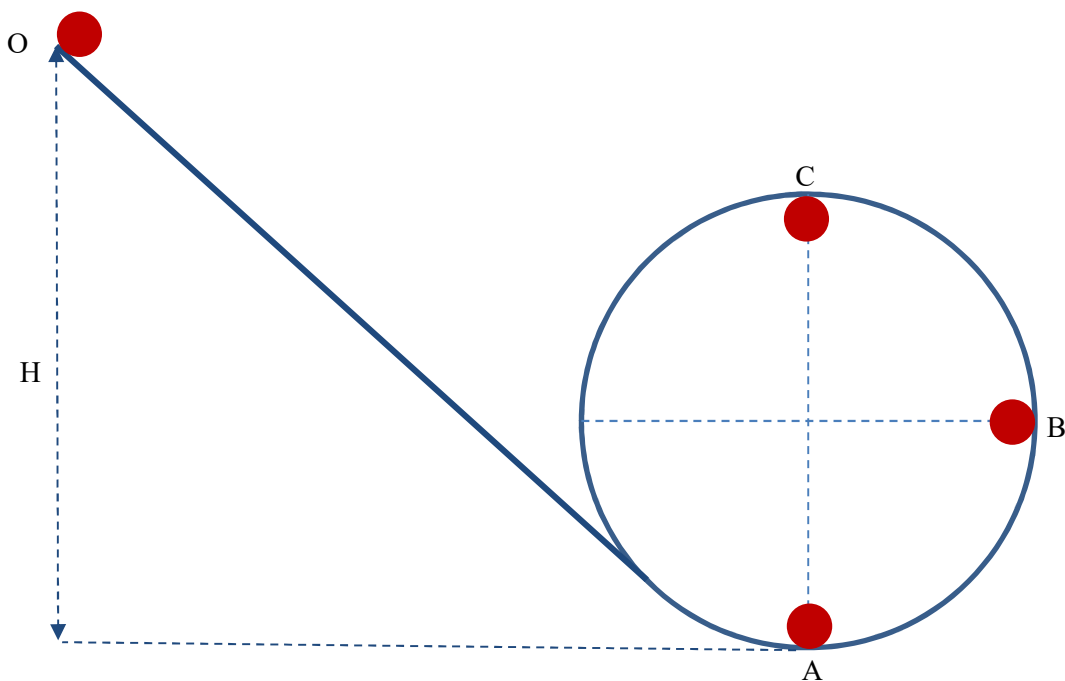
כאשר שחררנו את הכדור מהקצה העליון של המסילה, הכדור ביצע סיבוב שלם במסילה ולא ניתק ממנה, וכאשר הכדור שוחרר מתחת לגובה מסוים, שנקרא לו **גובה קריטי**, הכדור ניתק מהמסילה המעגלית.



כאשר הכדור ניתק מהמסילה, לא פועל כוח הדדי בינו לבין המסילה. ננתח את תנועת הכדור על המסילה במספר נקודות, בהן נמצא את מהירות הכדור ואת הכוח שהמסילה מפעילה עליו. באמצעות ניתוח זה נמצא גם מהו התנאי לכך, שהכדור לא יינתק מהמסילה.

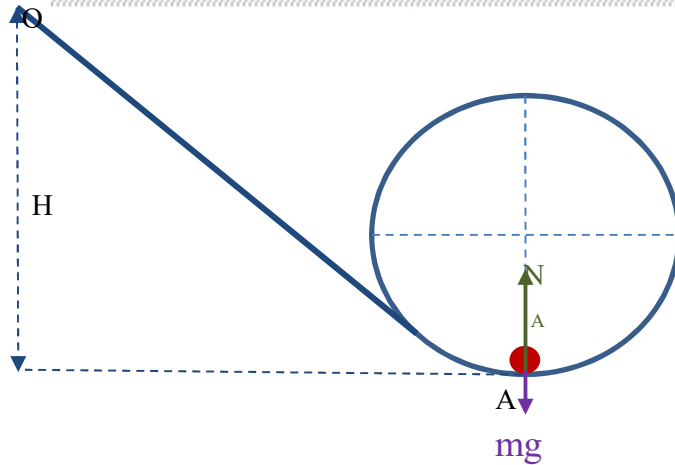
התנועה הזו היא כמובן תנועה מעגלית אבל במעגל זקוף (אנכי) ולא אופקי.
גם בתנועה כזו יש להביא בחשבון גם את שקול הכוחות, הפועלים על הגוף לכיוון מרכז המעגל.
נמצא את מהירות הכדור ואת הכוח הפועל על הכדור במספר נקודות (בהנחה שהמסילה חלקה)
באמצעות:

- (1) ניתוח הכוחות הפועלים על הכדור בכיוון הרדיאלי.
- (2) חוק שימור אנרגיה.



ניתוח בנקודה A:

נתחיל את הניתוח מנקודה A.



$$\Sigma F_R = m \cdot a_R$$

$$N_A - m \cdot g = m \cdot \frac{v_A^2}{R}$$

$$N_A = m \cdot \frac{v_A^2}{R} + m \cdot g$$

מסקנה: הכוח הפועל בין המסילה לכדור גדול ממשקל הכדור.

במקרה שלנו ניתן למצוא את המהירות משיקולי שימור האנרגיה:

$$E_O = E_A$$

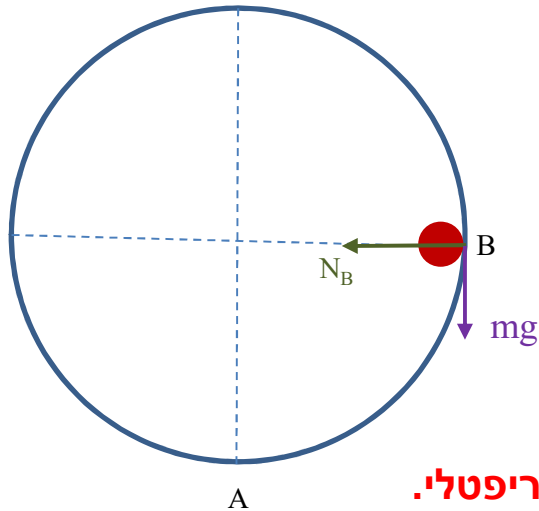
$$m \cdot g \cdot H = \frac{m \cdot v_A^2}{2}$$

ניתוח בנקודה B :

כאן mg לא תורם לכוח הצנטריפטלי (הוא פועל בניצב לכוח הנורמלי).

$$\Sigma F_R = m \cdot a_R$$

$$N_B = m \cdot \frac{v_B^2}{R}$$



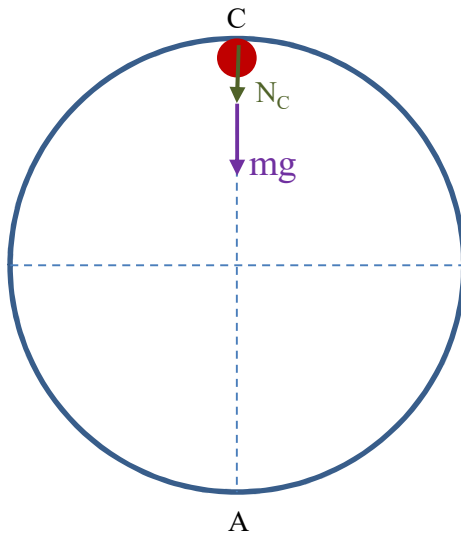
מסקנה: הכוח בו הכדור מעיק על המסילה שווה בדיוק לכוח הצנטריפטלי.

$$E_A = E_B$$

$$\frac{m \cdot v_A^2}{2} = \frac{m \cdot v_B^2}{2} + m \cdot g \cdot R$$

ניתוח בנקודה C:

בהנחה שמהירות הכדור מאפשרת לכדור עדיין להיות צמוד למסילה גם בנקודה C:



$$\Sigma F_R = m \cdot a_R$$

$$N_C + mg = m \cdot \frac{v_C^2}{R}$$

$$N_C = m \cdot \frac{v_C^2}{R} - mg$$

מה נדרש כדי שהכדור לא יינתק מהמסילה בנקודה C?

$$E_A = E_C$$

$$\frac{m \cdot v_A^2}{2} = \frac{m \cdot v_C^2}{2} + m \cdot g \cdot 2R$$

המהירות הקריטית בנקודה העליונה

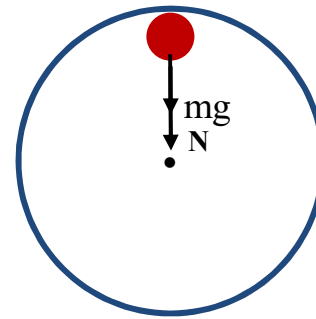
התנאי לסיבוב מלא הוא שבנקודה העליונה הכדור יהיה על סף הינתקות מהמסילה אך עדיין ישלים תנועה מעגלית. במצב זה, הכוח הנורמלי יתאפס.

המהירות המינימלית המאפשרת זאת נקראת המהירות הקריטית.

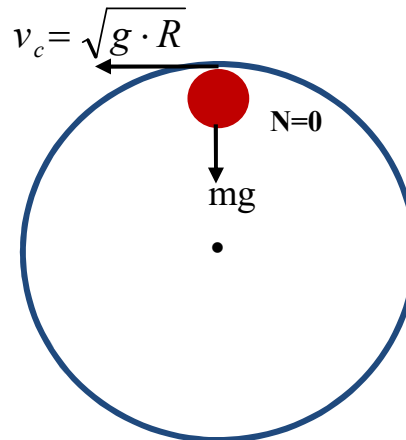
$$\Sigma F_R = m \cdot a_R$$

$$N + m \cdot g = m \cdot \frac{v_c^2}{R} \Rightarrow N = 0$$

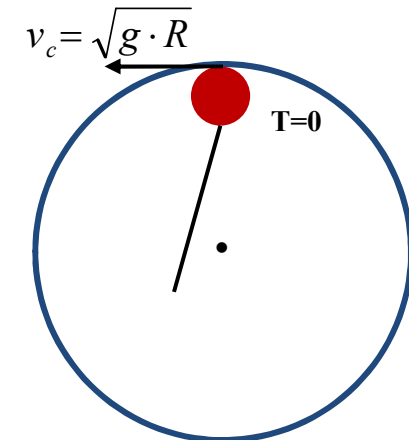
$$v_c = \sqrt{g \cdot R}$$



במקרה של מסילה:



במקרה של חוט
(בציור חסר mg):



המהירות הקריטית בנקודה התחתונה

נבדוק מה צריכה להיות המהירות בתחתית המסלול המעגלי בכדי שהמהירות בקצה העליון של המסלול המעגלי תהיה שווה למהירות הקריטית.

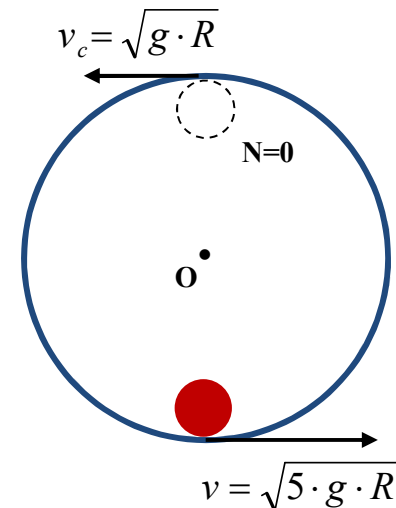
המהירות הקטנה ביותר האפשרית בנקודה התחתונה היא המהירות, הנדרשת כדי שהגוף יגיע לנקודה העליונה במהירות הקריטית, אז הכוח הנורמלי או המתיחות (בנקודה העליונה) יהיו שווים לאפס. בעזרת שימור אנרגיה נקבל:

$$\frac{m \cdot v^2}{2} = \frac{m \cdot v_c^2}{2} + m \cdot g \cdot 2R$$

$$v^2 = v_c^2 + 4 \cdot g \cdot R$$

$$v^2 = g \cdot R + 4 \cdot g \cdot R$$

$$v = \sqrt{5 \cdot g \cdot R}$$



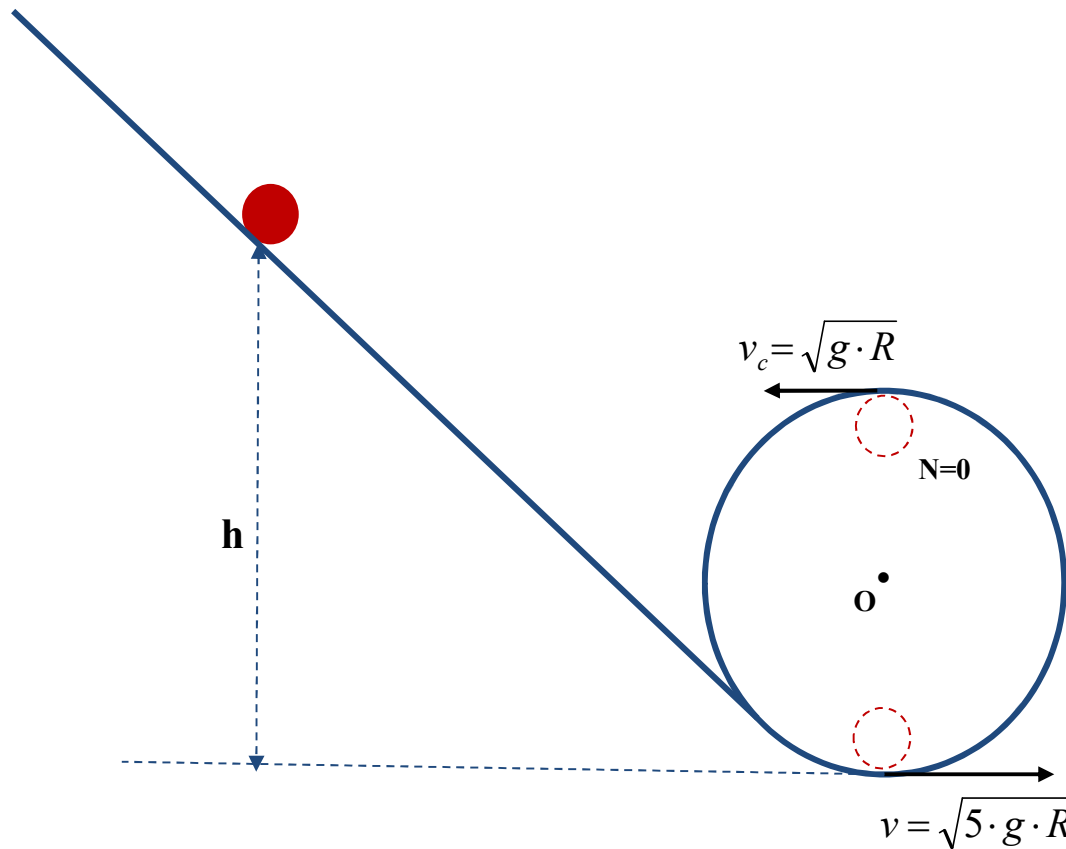
בעזרת שימור אנרגיה נמצא את הגובה המינימאלי ממנו יש לשחרר את הכדור בכדי שישלים סיבוב מלא:

$$mgh = \frac{m \cdot v^2}{2}$$

$$mgh = \frac{m \cdot \sqrt{5 \cdot g \cdot R}^2}{2}$$

$$mgh = \frac{m \cdot 5gR}{2}$$

$$h = 2.5R$$



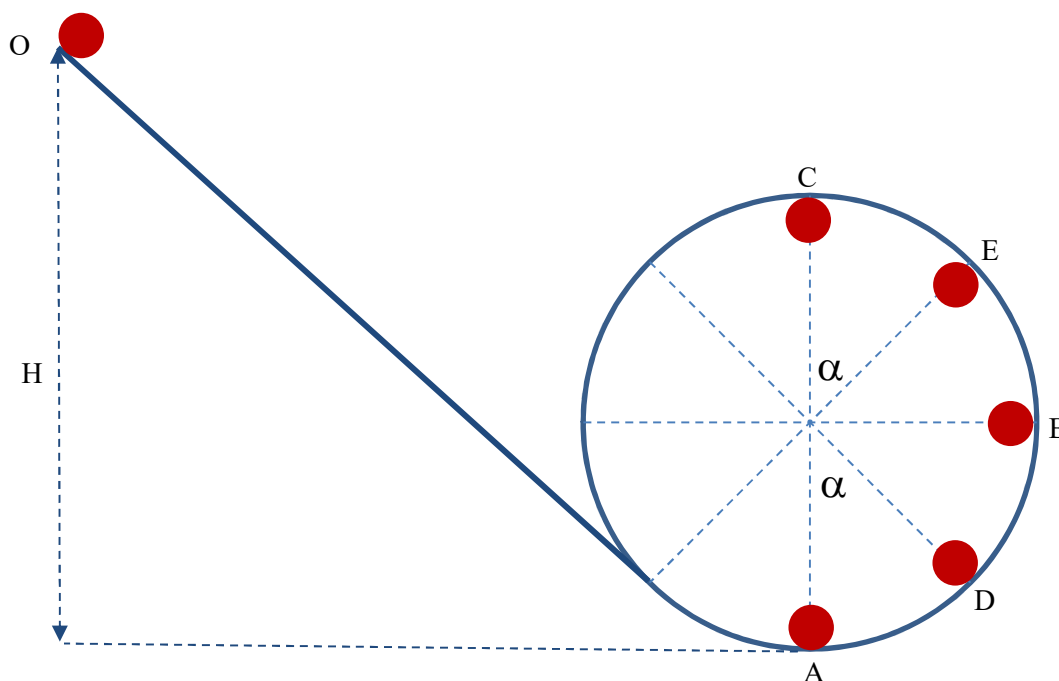
גוף קטן שמסתו $m=0.2\text{kg}$ מחליק בלי חיכוך על גבי מסילה OABD.

המסילה מסתיימת בקטע מעגלי זקוף, שרדיוסו $R=2\text{m}$.

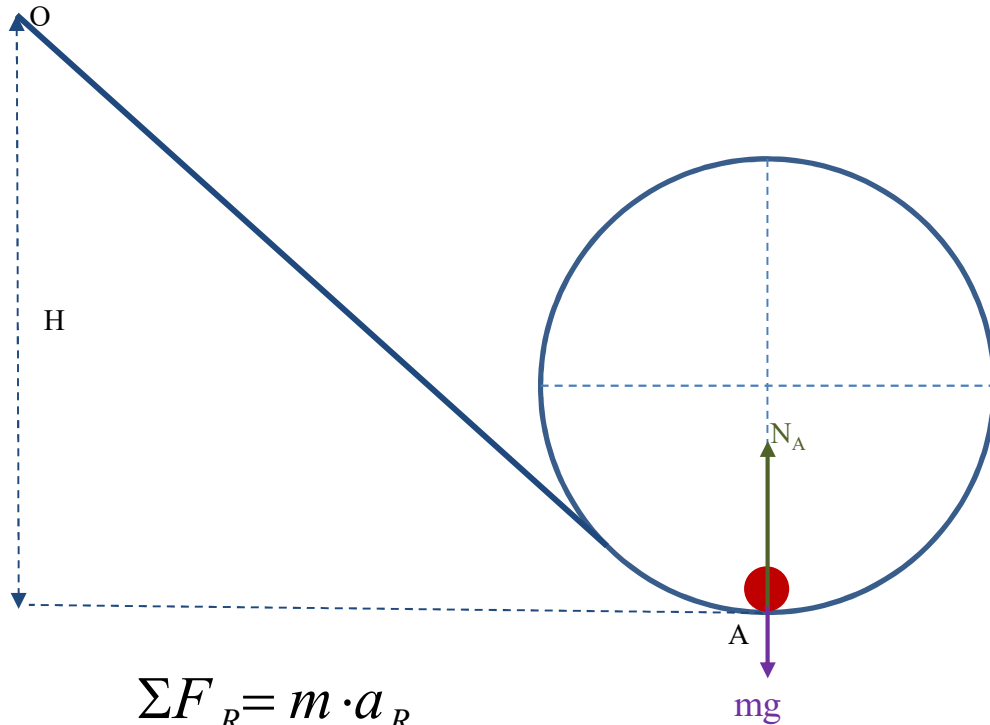
משחררים את הגוף מנקודה A, הנמצאת בגובה $H=10\text{m}$ מעל משטח אופקי, העובר דרך הנקודה A.

נתון: $\alpha=60^\circ$.

מהו הכוח שמפעילה המסילה על הכדור בנקודות: A, B, C, D, E?



נקודה A :



$$\Sigma F_R = m \cdot a_R$$

$$N_A - m \cdot g = m \cdot \frac{v_A^2}{R}$$

$$N_A = m \cdot \frac{v_A^2}{R} + m \cdot g$$

$$N_A = 0.2 \cdot \frac{200}{2} + 0.2 \cdot 10 = 22 N$$

$$E_O = E_A$$

$$m \cdot g \cdot H = \frac{m \cdot v_A^2}{2}$$

$$v_A^2 = 2 \cdot g \cdot H = 2 \cdot 10 \cdot 10 = 200 \frac{m^2}{sec^2}$$

$$v_A = 14.14 \frac{m}{sec}$$

המשך פתרון תרגיל B 1

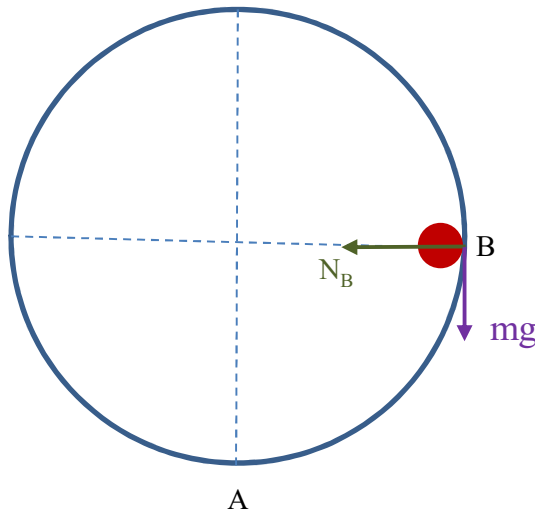
נקודה B :

$$E_A = E_B$$

$$\frac{m \cdot v_A^2}{2} = \frac{m \cdot v_B^2}{2} + m \cdot g \cdot R$$

$$\frac{200}{2} = \frac{v_B^2}{2} + g \cdot 2$$

$$v_B = 12.64 \frac{m}{sec}$$



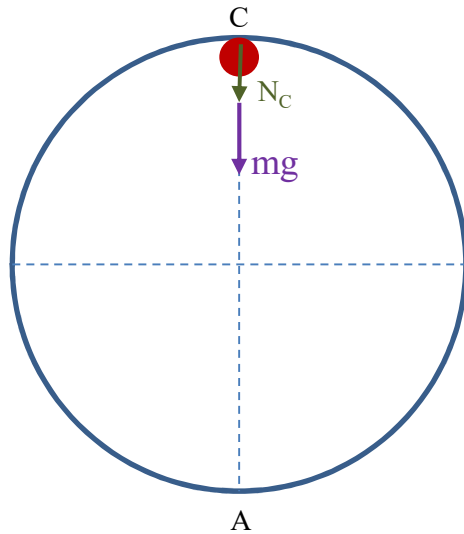
$$\Sigma F_R = m \cdot a_R$$

$$N_B = m \cdot \frac{v_B^2}{R}$$

$$N_B = 0.2 \cdot \frac{12.64^2}{2} = 16N$$

המשך פתרון תרגיל C 1

נקודה C :



$$E_A = E_C$$

$$\frac{m \cdot v_A^2}{2} = \frac{m \cdot v_C^2}{2} + m \cdot g \cdot 2R$$

$$\frac{200}{2} = \frac{v_C^2}{2} + g \cdot 2 \cdot 2$$

$$v_C = 10.95 \frac{m}{sec}$$

$$\Sigma F_R = m \cdot a_R$$

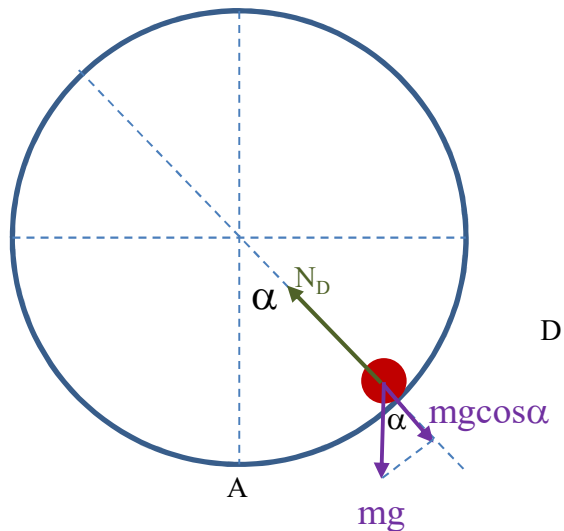
$$N_C + mg = m \cdot \frac{v_C^2}{R}$$

$$N_C = m \cdot \frac{v_C^2}{R} - mg$$

$$N_C = 0.2 \cdot \frac{10.95^2}{2} - 0.2 \cdot 10 = 10N$$

המשך פתרון תרגיל 1 D

נקודה D:



$$E_A = E_D$$

$$\frac{m \cdot v_A^2}{2} = \frac{m \cdot v_D^2}{2} + m \cdot g \cdot (R - R \cos \alpha)$$

$$\frac{200}{2} = \frac{v_D^2}{2} + g \cdot (2 - 2 \cos 60)$$

$$v_D = 13.41 \frac{m}{sec}$$

$$\Sigma F_R = m \cdot a_R$$

$$N_D - mg \cos \alpha = m \cdot \frac{v_D^2}{R}$$

$$N_D - 0.2 \cdot g \cos 60 = 0.2 \cdot \frac{13.41^2}{2}$$

$$N_D = 19N$$

המשך פתרון תרגיל 1 E

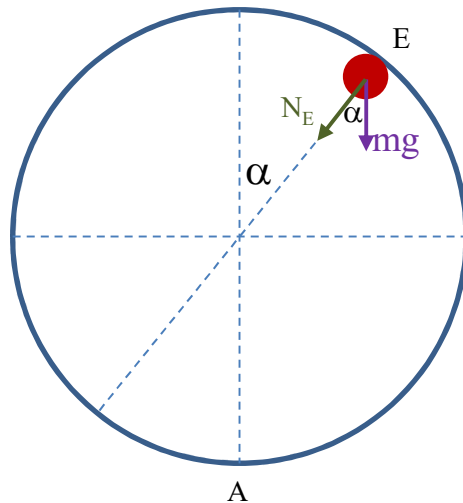
נקודה E:

$$E_A = E_E$$

$$\frac{m \cdot v_A^2}{2} = \frac{m \cdot v_E^2}{2} + m \cdot g \cdot (R + R \cos \alpha)$$

$$\frac{200}{2} = \frac{v_E^2}{2} + g \cdot (2 + 2 \cos \alpha)$$

$$v_E = 11.83 \frac{m}{sec}$$



$$\Sigma F_R = m \cdot a_R$$

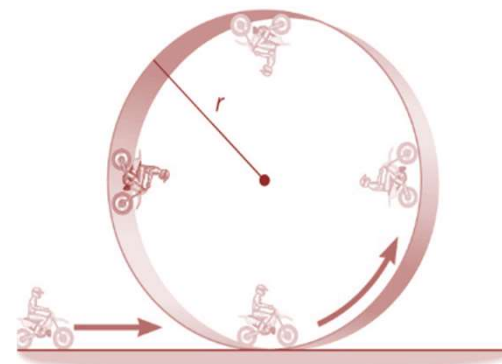
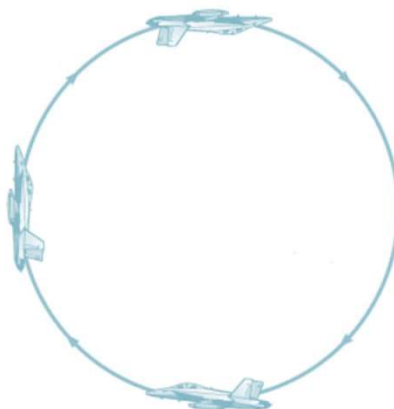
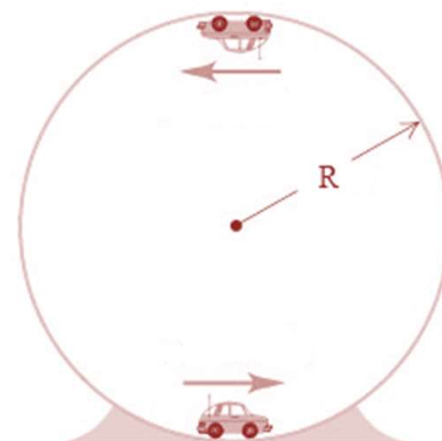
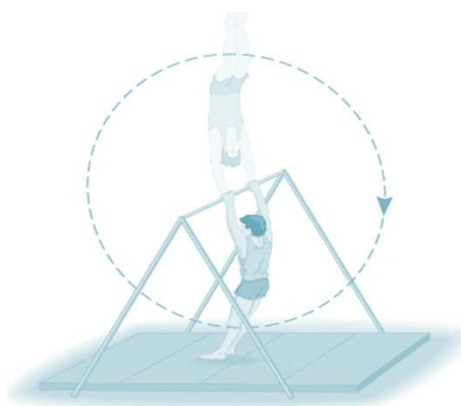
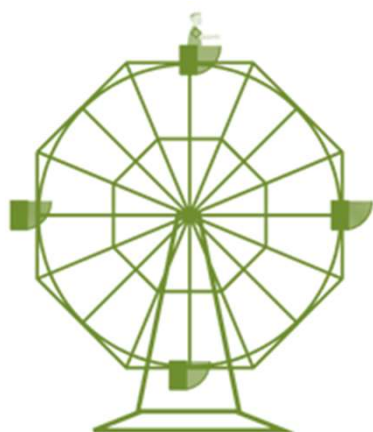
$$N_E + mg \cos \alpha = m \cdot \frac{v_E^2}{R}$$

$$N_E + 0.2 \cdot g \cos 60 = 0.2 \cdot \frac{11.83^2}{2}$$

$$N_E = 13N$$

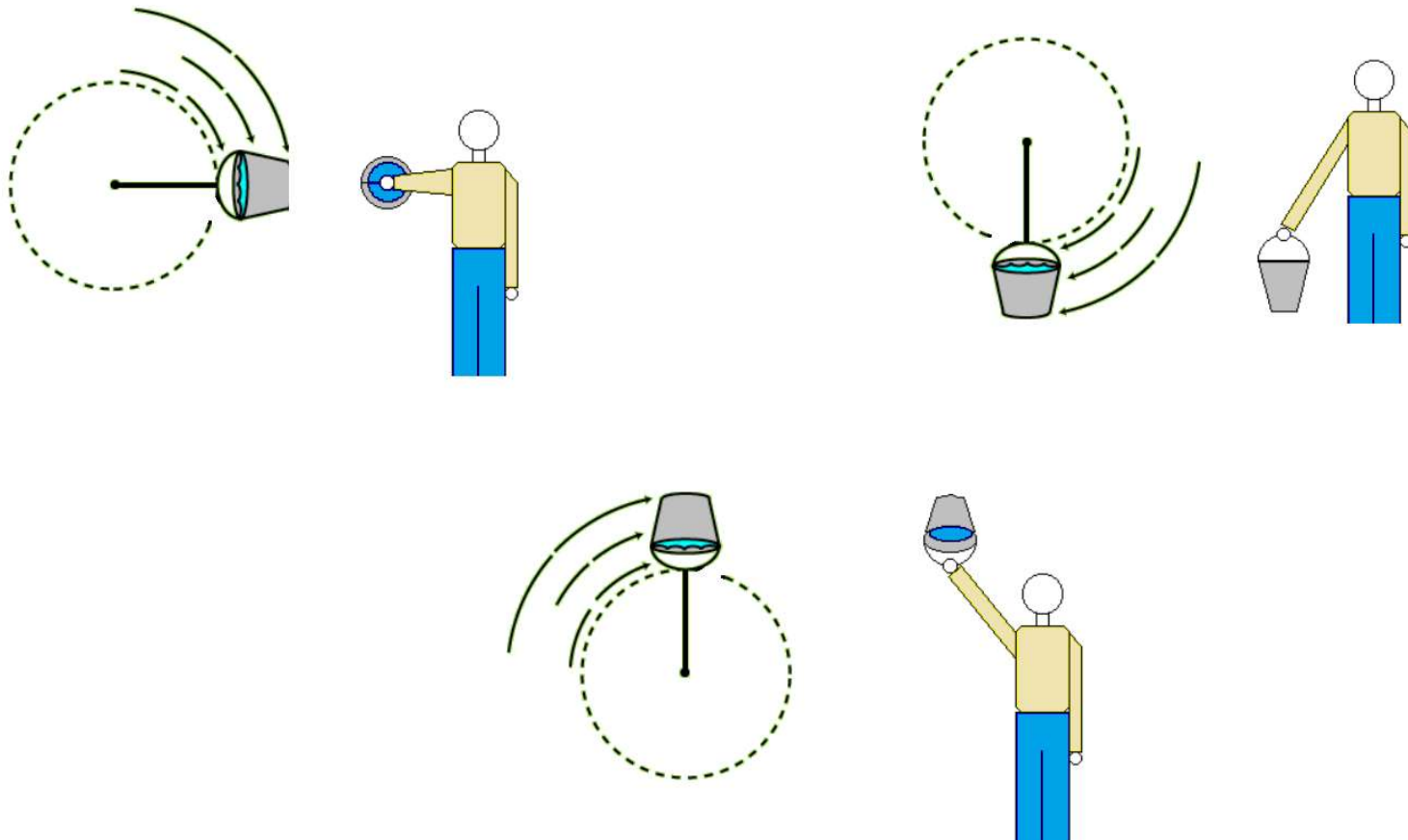
התנועה במעגל אנכי בחיי היומיום

תנועה במעגל אנכי נפוצה מאוד. למשל: בגשרים (קעורים או קמורים), כבישים קמורים, בתנועת מטוסים, מתקנים בלונה פארק ועוד...



מדוע המים אינם נשפכים?

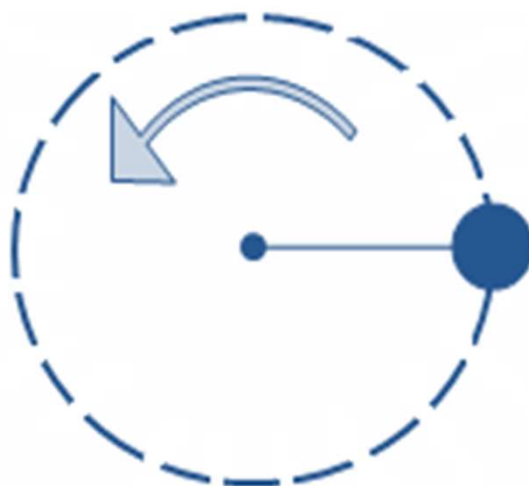
ידוע שכאשר מסובבים דלי מלא במים במהירות מספקת, לא יישפכו המים מן הדלי.



מהו התנאי לכך שהמים לא יישפכו?

<https://www.youtube.com/watch?v=FM1Y6tROWEo>

כדור שמסתו 0.4kg קשור בחוט שאורכו 1m ומסובב במעגל אנכי שלם.

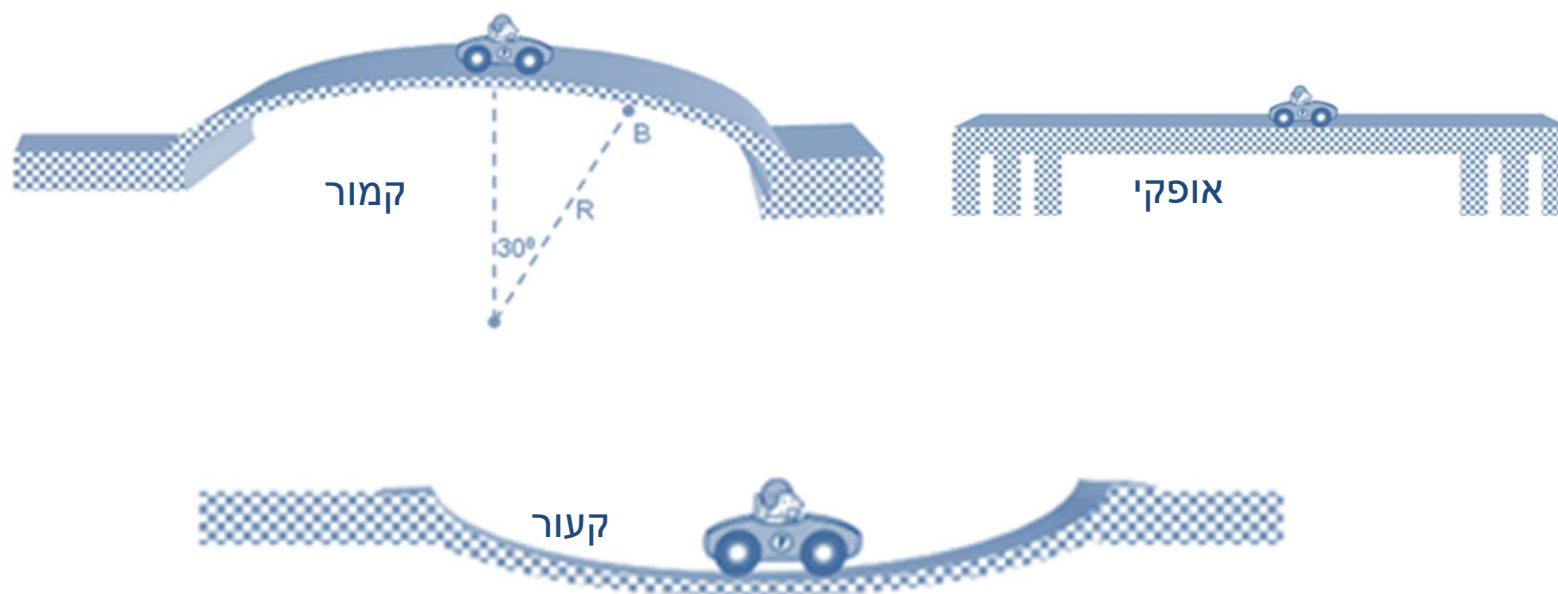


- א. מהי המהירות המינימאלית האפשרית בנקודה העליונה של מסלולו?
- ב. מהי המהירות המינימאלית האפשרית בנקודה התחתונה של מסלולו?
- ג. מהי המתיחות בחוט בנקודה התחתונה ובנקודה העליונה במקרה הזה?

תרגיל 3 - כבישים וגשרים (מסלולים קמורים וקעורים)

מכונית שמסתה $m=2000 \text{ kg}$ עוברת על פני מרכז גשר (או כביש) קמור במהירות קבועה של $V=80 \text{ km/h}$.
א. מהו הכוח בו מעיקה המכונית על מרכז הגשר אם:

1. הגשר אופקי
2. הגשר קמור ורדיוסו $R=60 \text{ m}$?
3. הגשר קעור ורדיוסו $R=60 \text{ m}$?



- ב. באיזו מהירות צריך הנהג לנסוע על גבי הגשר הקמור, בכדי שבמרכז הקימור הוא לא יעיק כלל על מושבו?
- ג. מהו הכוח בו מעיקה המכונית על הגשר בנקודה B?

פתרון תרגיל 3

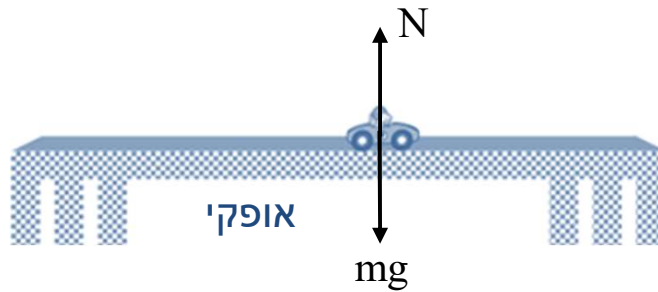
1. בכיוון האנכי

על פי החוק הראשון של ניוטון:

$$\Sigma F_y = 0$$

$$N - m \cdot g = 0$$

$$N = m \cdot g$$



מסקנה: הכביש מפעיל על המכונית כוח השווה למשקלה!

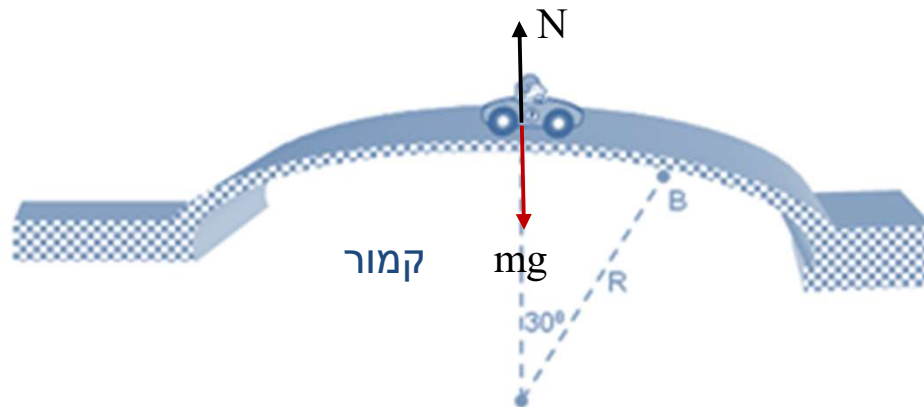
2. גשר קמור (רדיוס 60m). בכיוון מרכז המעגל (הגשר מהווה חלק ממעגל)

על פי החוק השני של ניוטון:

$$\Sigma F_R = m \cdot a_R$$

$$mg - N = m \cdot \frac{v^2}{R}$$

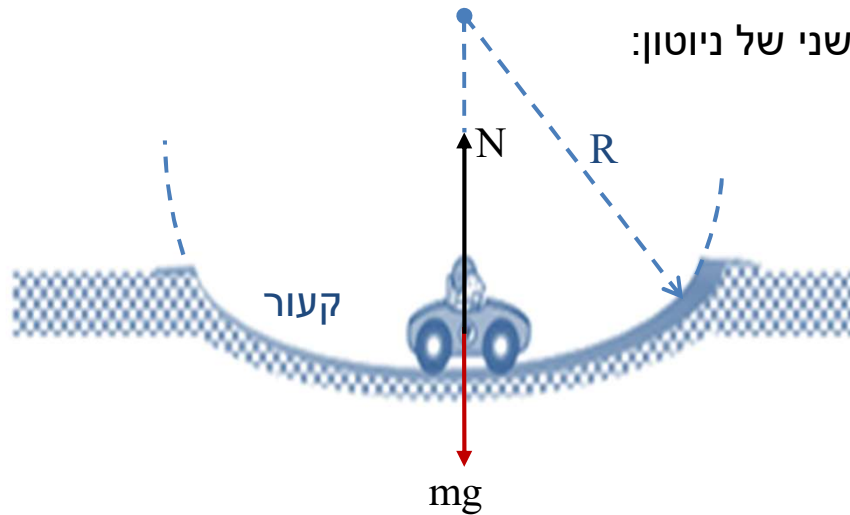
$$N = mg - m \cdot \frac{v^2}{R}$$



אם הרכב נוסע במהירות גבוהה מדי, הוא עלול להינתק מהכביש (הרכב לא יהיה צמוד לכביש) (במשוואה יתקבל $N < 0$, זה כמובן לא ערך פיזיקלי) והנהג יאבד שליטה!

המשך פתרון תרגיל 3 – כבישים קמורים וקעורים

3. גשר קעור: בכיוון מרכז המעגל על פי החוק השני של ניוטון:



$$\Sigma F_R = m \cdot a_R$$

$$N - mg = m \cdot \frac{v^2}{R}$$

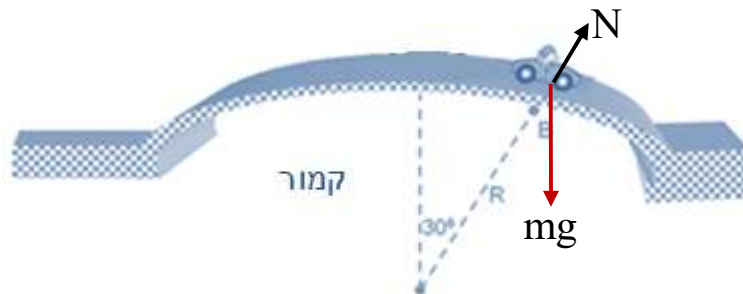
$$N = mg + m \cdot \frac{v^2}{R}$$

ב. בכיוון מרכז המעגל

נמצא את המהירות הקריטית:

$$v = \sqrt{g \cdot R} = \sqrt{10 \cdot 60} = 24.49 \frac{m}{sec}$$

ג. בכיוון מרכז המעגל

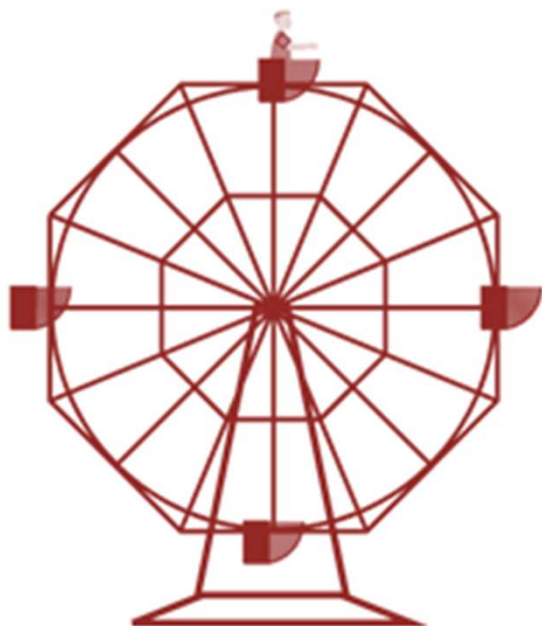


$$\Sigma F_R = m \cdot a_R$$

$$mg \cdot \cos \alpha - N = m \cdot \frac{v^2}{R}$$

$$N = mg \cdot \cos \alpha - m \cdot \frac{v^2}{R}$$

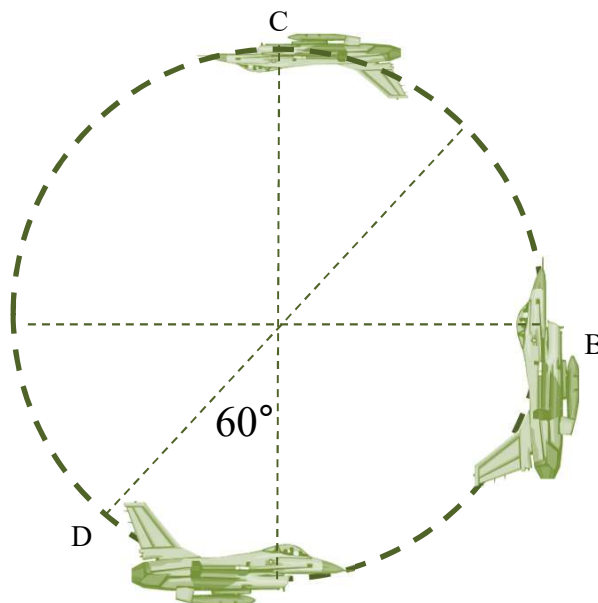
ילד שמסתו 50g מסתובב בגלגל ענק, הנע במעגל אנכי במהירות קבועה.
המרחק של מושב הילד ממרכז הסיבוב הוא 12m, וזמן סיבוב אחד הוא 2 דקות.



- א. מהו הכוח שמפעיל המושב על הילד בנקודה הנמוכה של המסלול?
- ב. מהו הכוח שמפעיל המושב על הילד בנקודה הגבוהה של המסלול?

https://www.youtube.com/watch?feature=player_detailpage&v=dPUZXQgr9Jc

טייס שמסתו 80 ק"ג מבצע לולאה אנכית (loop) כשהוא טס כל הזמן במהירות קבועה.



- א. מהי תאוצתו הרדיאלית של המטוס, אם ידוע שמשקלו של הטייס בנקודה התחתונה של הלולאה גדול פי 1.5 ממשקלו בנקודה העליונה של הלולאה?
 - ב. מהי מהירות המטוס, אם ידוע שרדיוס הלולאה הוא $R=1500\text{m}$?
 - ג. מה משקלו של הטייס בנקודות A, B, C, D? בטאו את תאוצתו בעזרת g .
 - ד. רוצים שבנקודה העליונה של הלולאה הטייס ירגיש חוסר משקל.
- (1) מה צריכה להיות לשם כך מהירותו הקבועה?
- (2) מה יהיה משקלו בנקודה התחתונה במהירות זו?

פתרון תרגיל 5

א. בנקודה העליונה:

$$\Sigma F_R = m \cdot a_R$$

$$N_1 + mg = m \cdot a_R$$

בנקודה התחתונה:

$$\Sigma F_R = m \cdot a_R$$

$$N_2 - mg = m \cdot a_R$$

$$N_1 + mg = N_2 - mg$$

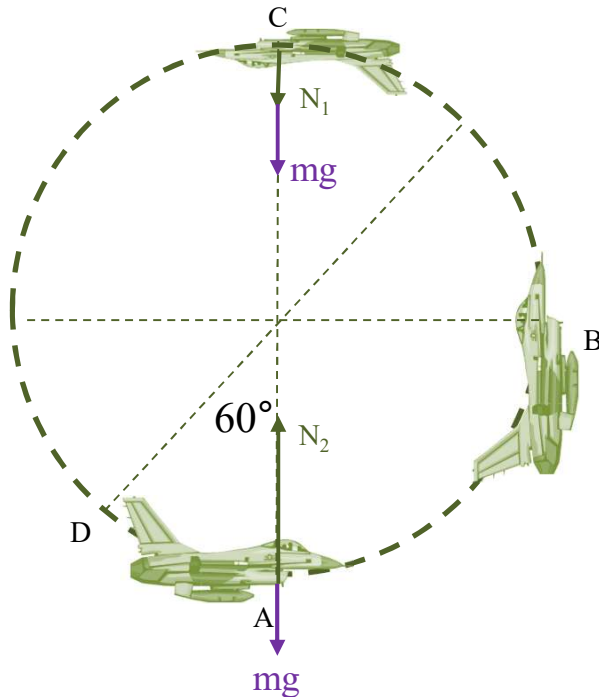
$$1.5 \cdot N_1 = N_2 \quad \text{נתון:}$$

$$N_1 + mg = 1.5 \cdot N_1 - mg$$

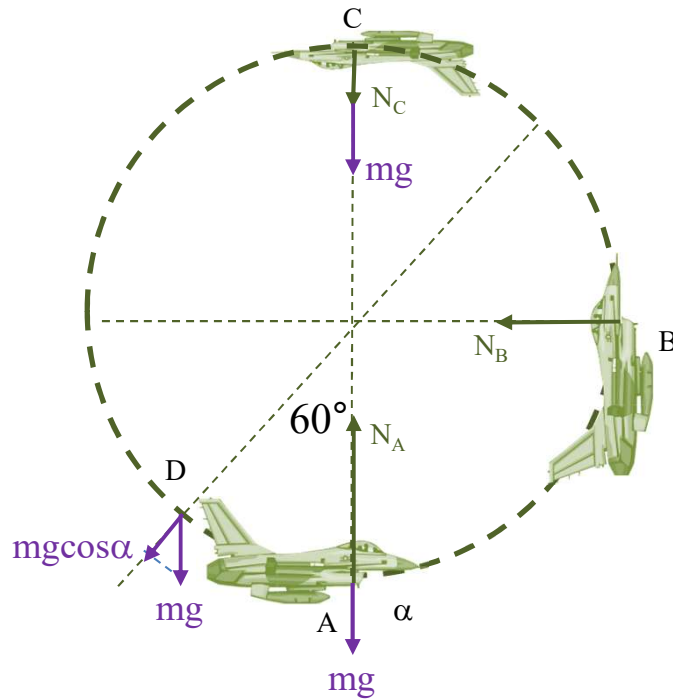
$$2mg = 0.5 \cdot N_1$$

$$N_1 = \frac{2mg}{0.5} = \frac{2 \cdot 80 \cdot 10}{0.5} = 3200N$$

$$N_2 = 1.5 \cdot N_1 = 1.5 \cdot 3200 = 4800N$$



המשך פתרון תרגיל 5



ב.

$$\Sigma F_R = m \cdot a_R$$

$$N_2 - mg = m \cdot a_R$$

$$4800 - 80g = 80 \cdot \frac{v^2}{1500}$$

$$v = 273.86 \frac{m}{sec}$$

ג.

$$N_C = N_1 = 3200N \Rightarrow 3200 = 80 \cdot a \Rightarrow a = 40 \frac{m}{sec^2} = 4g$$

$$N_A = N_2 = 4800N \Rightarrow 4800 = 80 \cdot a \Rightarrow a = 60 \frac{m}{sec^2} = 6g$$

$$\Sigma F_R = m \cdot a_R$$

$$N_D - mg \cos \alpha = m \cdot \frac{v_D^2}{R}$$

$$N_D - 80 \cdot g \cos 60 = 80 \cdot \frac{273.68^2}{1500}$$

$$N_D = 4400N \Rightarrow a = 5.5g$$

$$\Sigma F_R = m \cdot a_R$$

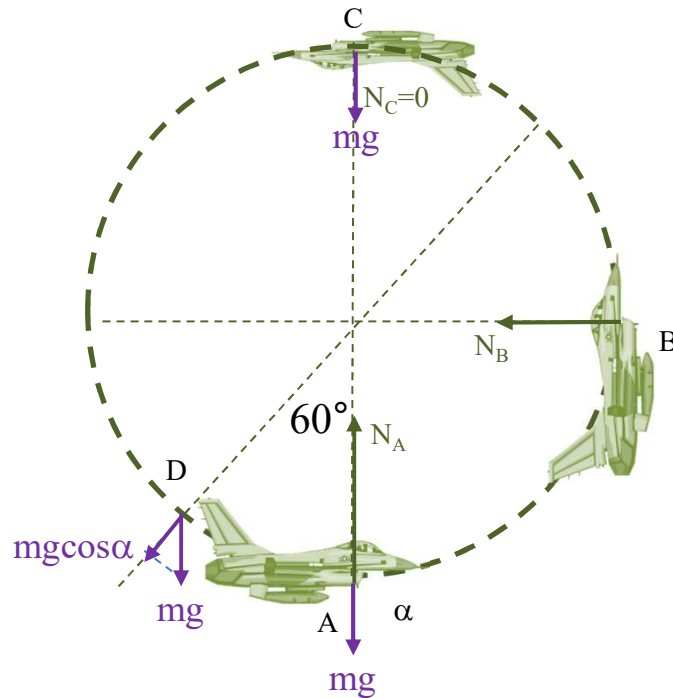
$$N_B = m \cdot \frac{v_B^2}{R}$$

$$N_B = 80 \cdot \frac{273.86^2}{1500}$$

$$N_B = 4000N \Rightarrow a = 5g$$

המשך פתרון תרגיל 5

ד. נידרש: $N_C=0$



$$\Sigma F_R = m \cdot a_R$$

$$N_C + m \cdot g = m \cdot \frac{v_c^2}{R} \Rightarrow N_C = 0$$

$$v_c = \sqrt{g \cdot R} = \sqrt{g \cdot 1500}$$

$$v_c = 122.47 \frac{m}{sec}$$

$$\Sigma F_R = m \cdot a_R$$

$$N_A - mg = m \cdot \frac{v_A^2}{R}$$

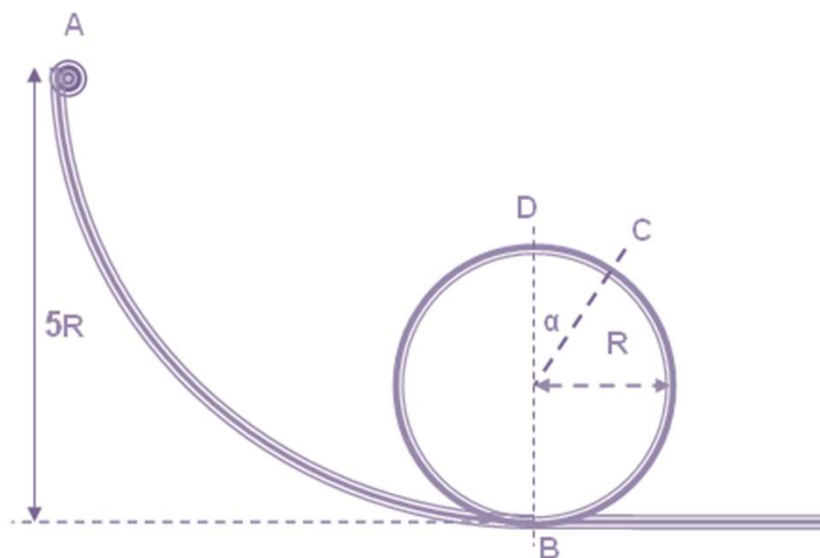
$$N_A - 80 \cdot g = 80 \cdot \frac{122.47^2}{1500}$$

$$N_A = 1600 N$$

https://www.youtube.com/watch?feature=player_detailpage&v=X9Tpo9B4EME

https://www.youtube.com/watch?feature=player_detailpage&v=xIE0NBSv1kE

גוף קטן שמסתו m מחליק בלי חיכוך על גבי מסילה ABCD. המסילה מסתיימת בקטע מעגלי זקוף שרדיוסו R . משחררים את הגוף מנקודה A, הנמצאת בגובה $5R$ מעל משטח אופקי העובר דרך הנקודה B נתונים: α, R, m, g .

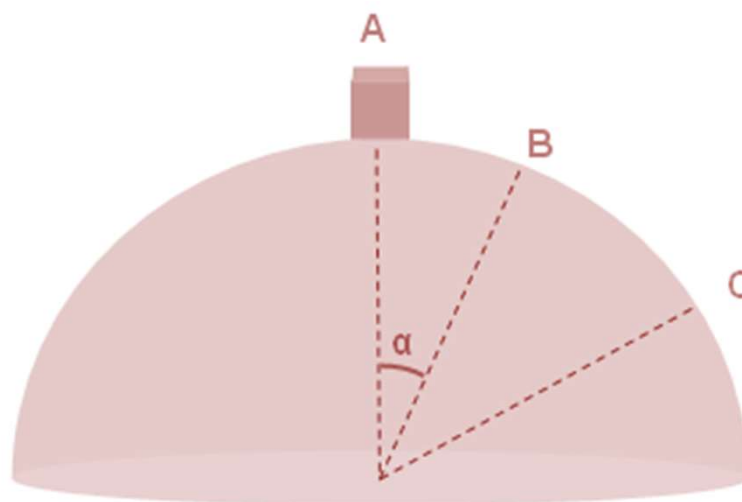


- הוכיחו שהגוף אינו ניתק מהמסילה.
- מהו וקטור המהירות? מהו גודלו ומהו כיוונו בנקודה D?
- מהי התאוצה הרדיאלית בנקודה D?
- מהו הגובה המינימאלי h ממנו ניתן לשחרר את הגוף, כדי שהגוף לא יינתק מהמסילה המעגלית.
- מהו גודל הכוח בו מעיק הגוף על המסילה, כשהגוף משוחרר מהגובה h מהסעיף הקודם,

בנקודות : B ו- C.

גוף שמסתו m מונח על פני כיפה חצי-כדורית חלקה שרדיוסה R . משחררים את הגוף ממנוחה מנקודה A , הנמצאת בקודקודה של הכיפה.

נתונים: R, g, α .



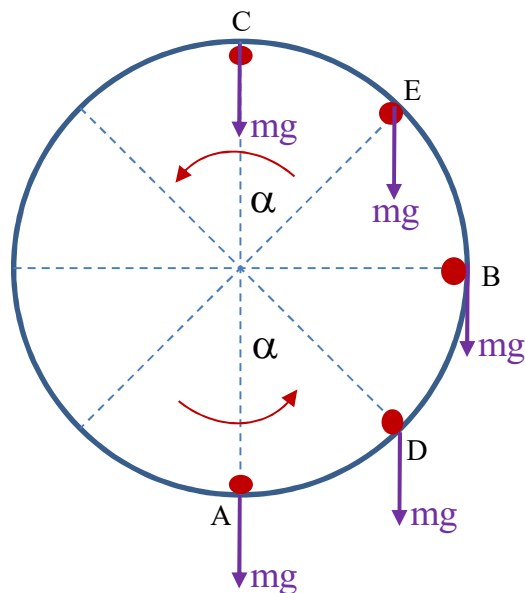
א. בטאו את מהירותו בנקודה כלשהי B בעזרת נתוני השאלה.

ב. מהו גודל הכוח בו מעיק הגוף על הכיפה בנקודה B ?

ג. הגוף מתנתק מהכיפה בנקודה C . באיזו זווית התרחש הניתוק?

ד. אם הכיפה לא הייתה חלקה, האם הגוף היה ניתק בנקודה נמוכה יותר מ- C ?

במקרים שניתחנו בקשר למעגל אופקי, השתנה רק כיוון המהירות ולא גודלה. בתנועה במעגל אנכי (זקוף), גם גודל המהירות משתנה בהשפעת כוח הכובד מכאן, שלכדור יש תאוצה משיקית המסומנת ב- a_T . את גודלה נמצא באמצעות ניתוח הכוחות הפועלים על הכדור בכיוון המשיקי.



ניתוח בנקודה A :

$$a_{T(A)} = 0$$

אין כוחות בכיוון המשיק לכן:

ניתוח בנקודה B :

$$\Sigma F_T = m \cdot a_T$$

$$-mg = m \cdot a_T$$

$$a_{T(B)} = -g$$

ניתוח בנקודה C :

אין כוחות בכיוון המשיק לכן:

$$a_{T(C)} = 0$$

ניתוח בנקודה D :

$$\Sigma F_T = m \cdot a_T$$

$$-mg \sin \alpha = m \cdot a_T$$

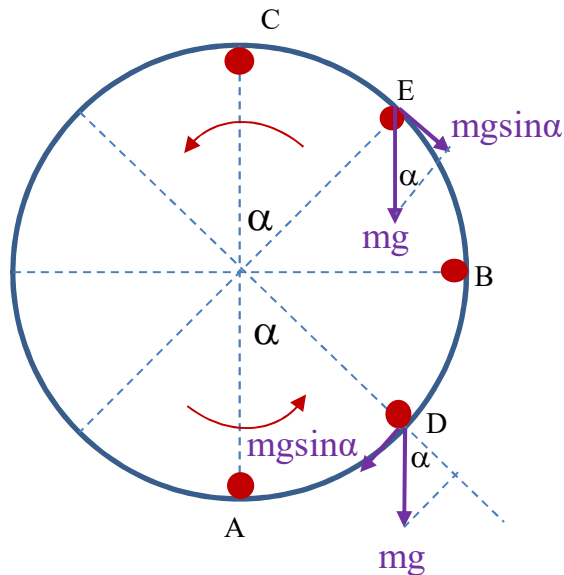
$$a_{T(D)} = -g \sin \alpha$$

ניתוח בנקודה E :

$$\Sigma F_T = m \cdot a_T$$

$$-mg \sin \alpha = m \cdot a_T$$

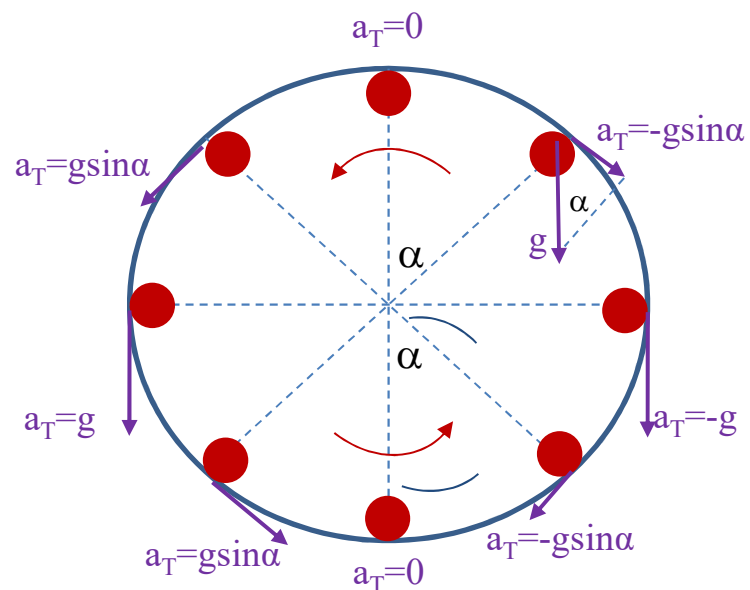
$$a_{T(E)} = -g \sin \alpha$$



הזווית α היא הזווית בין הרדיוס לבין הקוטר האנכי.

מסקנה: ניתן להתייחס לנקודות שונות של המעגל כעל תנועה במישור משופע שזוויתו α .

סיכום – תאוצה משיקית בנקודות שונות



I. התאוצה המשיקית היא מרבית כאשר כוח הכובד פועל בכיוון המשיק למעגל.

II. התאוצה המשיקית היא מינימאלית, שווה לאפס, בנקודה העליונה והתחתונה
כי אין כלל רכיב של תאוצה בכיוון המשיק.

התאוצה השקולה

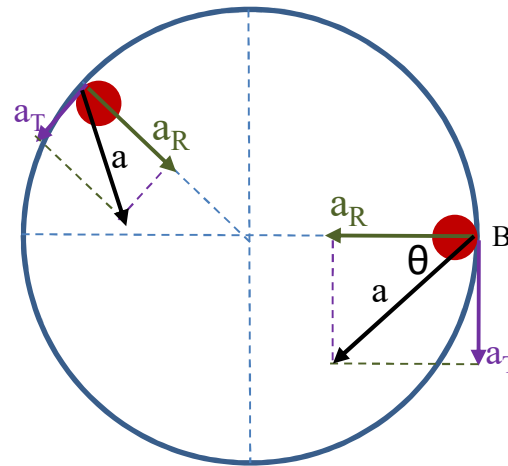
לגוף תאוצה רדיאלית כלפי מרכז הסיבוב הגורמת לשינוי כיוון המהירות, ותאוצה משיקית הגורמת לשינוי גודל המהירות. גודל התאוצה השקולה :

$$a = \sqrt{a_T^2 + a_R^2}$$

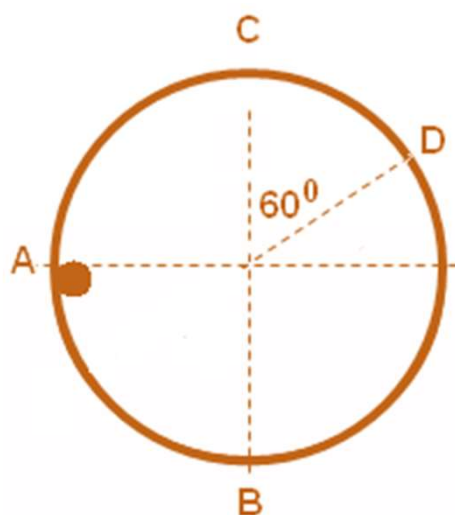
$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{a_T}{a_R}$$

כיוונה:

כאשר הזווית ϑ נמדדת ביחס לרדיוס המעגל.



כדור שמסתו 150g נע במסילה אנכית שרדיוסה 2.5m. מהירותו בנקודה התחתונה של המסלול היא 20m/sec.



- א. מהי התאוצה השקולה בנקודות: C, B, A ו- D?
- ב. מהו ההפרש בין הכוח שמפעילה המסילה בנקודה התחתונה לבין הכוח שהיא מפעילה בנקודה העליונה?

❖ בתנועה במעגל זקוף יש להביא בחשבון גם את כוח הכובד הפועל על הגוף.

❖ את המהירות ואת הכוח הפועל על גוף הנע במעגל אנכי ניתן למצוא באמצעות:

(1) ניתוח הכוחות הפועלים בכיוון הרדיאלי.

(2) חוק שימור האנרגיה.

❖ התנאי לסיבוב מלא הוא שבנקודה העליונה של המסלול המעגלי תהיה לגוף מהירות הגדולה או שווה

למהירות הקריטית, שערכה:
$$v_c = \sqrt{g \cdot R}$$

❖ בתנועה במעגל אנכי לגוף יש תאוצה רדיאלית כלפי מרכז הסיבוב הגורמת לשינוי כיוון המהירות,

ותאוצה משיקית הגורמת לשינוי גודל המהירות.

גודל התאוצה המשיקית:
$$a_T = -g \sin \alpha$$
 וגודל התאוצה הרדיאלית:
$$a_R = m \cdot \frac{v^2}{R}$$

גודל התאוצה השקולה:
$$a = \sqrt{a_T^2 + a_R^2}$$
 וכיוונה:
$$\tan \vartheta = \frac{a_T}{a_R}$$