

תנועה מעגלית

תנועה במעגל זקוף



Image courtesy of nuchylee at FreeDigitalPhotos.net

❖ בתנועה במעגל זקוף יש להתחשב גם בכוח הכובד הפועל על הגוף.

❖ את המהירות ואת הכוח הפועל על גוף הנע במעגל אנכי ניתן למצוא באמצעות:

(1) ניתוח הכוחות הפועלים בכיוון הרדיאלי.

(2) חוק שימור האנרגיה.

❖ התנאי לסיבוב מלא: בנקודה העליונה של המסלול המעגלי לגוף מהירות הגדולה או שווה למהירות

הקריטית:

$$v_c = \sqrt{g \cdot R}$$

❖ בתנועה במעגל אנכי, לגוף יש תאוצה רדיאלית כלפי מרכז הסיבוב הגורמת לשינוי **כיוון** המהירות,

ותאוצה משיקית הגורמת לשינוי **גודל** המהירות.

$$a_R = m \cdot \frac{v^2}{R}$$

וגודל התאוצה הרדיאלית:

$$a_T = -g \sin \alpha$$

גודל התאוצה המשיקית:

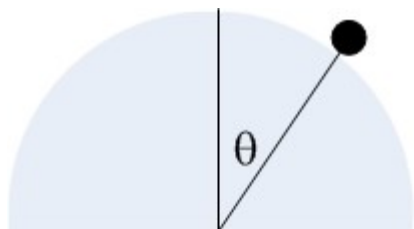
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a_T}{a_R}$$

וכיוונה:

$$a = \sqrt{a_T^2 + a_R^2}$$

גודל התאוצה השקולה :

- גוף מחליק מראש משטח מעגלי בעל רדיוס R , ללא חיכוך, כמוראה בציר. מהירותו בשיא הגובה שווה אפס.
1. הראו כי מהירות הגוף, כשהוא מצוי בזווית **כלשהי**, אינה תלויה במסתו.
 2. מה הקשר בין התוצאה שקיבלתם בסעיף הקודם לבין מהירות של גוף הנופל בנפילה חופשית?
 3. מי מספק את הכוח הרדיאלי הפועל על הגוף (כל זמן שהוא מצוי על המשטח)?
 4. מה גודלו של כוח זה כאשר הזווית היא θ ?
 5. מה ערכה של הזווית (הקריטית) בה יינתק הגוף מהמשטח?



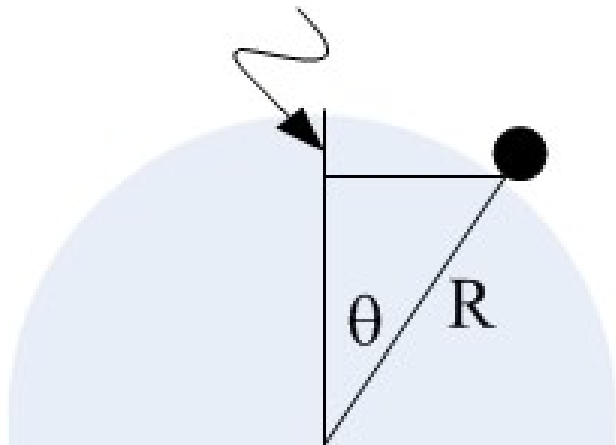
גוף מחליק מראש משטח מעגלי בעל רדיוס R , ללא חיכוך, כמוראה בציר. מהירותו בשיא הגובה שווה אפס.

1. הראו כי מהירות הגוף, כשהוא מצוי בזווית **כלשהי**, אינה תלויה במסתו.

◀ על פי התרשים, כאשר הזווית היא θ , מרחק הנפילה האנכי של הגוף הוא: $R(1 - \cos \theta)$.

◀ לכן, בהעדר חיכוך ומשיקולי אנרגיה מתקיים:

$R - R \cos \theta$



$$mgR(1 - \cos \theta) = \frac{1}{2}mv^2$$

$$v = \sqrt{2gR(1 - \cos \theta)}$$

◀ כלומר- מהירות ההחלקה אינה תלויה במסת הגוף

פתרון 1 המשך

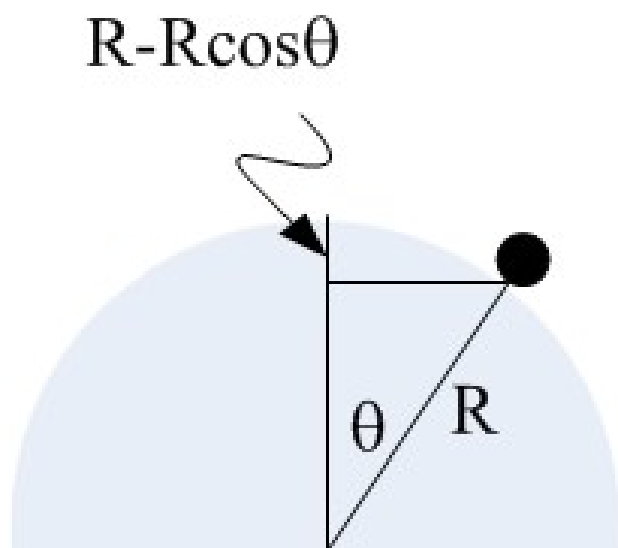
2. מה הקשר בין התוצאה שקיבלתם בסעיף הקודם למהירות של גוף הנופל בנפילה חופשית?
 התוצאה שקיבלנו היא: ◀

$$v = \sqrt{2gR(1 - \cos \theta)}$$

- ◀ כאשר הגוף יגיע לתחתית המדרון, יתקיים: $\theta = 90^\circ$ כלומר $\cos \theta = 0$
 במצב זה מהירותו תהיה: ◀

$$v = \sqrt{2gR}$$

- ◀ מהירות זו שווה למהירות של גוף הנופל חופשית מגובה R, שוב, ללא חיכוך כמובן.

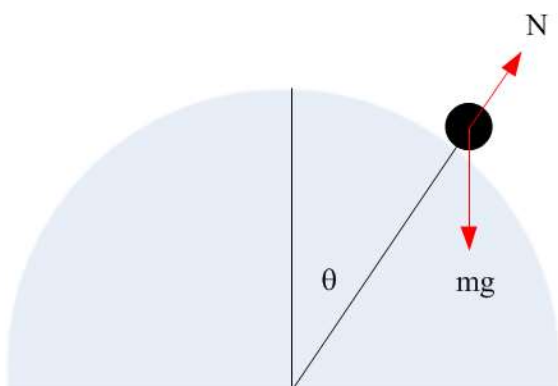


פתרון 1 המשך

3. מי מספק את הכוח הרדיאלי הפועל על הגוף (כל זמן שהוא מצוי על המשטח)?

◀ בזמן ההחלקה פועלים על הגוף שני כוחות: mg ו- N

◀ הכוח השקול שלהם בכיוון מרכז המעגל הוא הכוח הרדיאלי.



פתרון 1 המשך

4. מה גודלו של כוח זה כאשר הזווית היא θ ?

נשתמש בקשר:

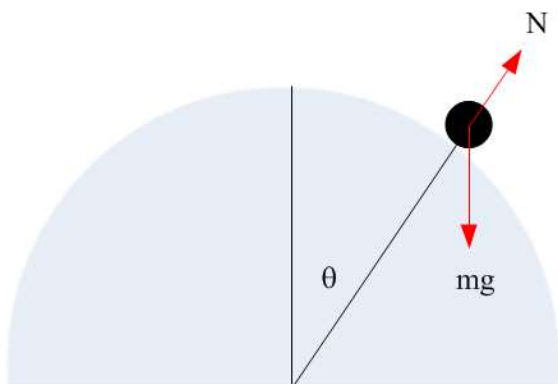
$$F_R = m \frac{v^2}{R}$$

נעזר בתוצאה של הסעיף הראשון:

$$v = \sqrt{2gR(1 - \cos \theta)}$$

ונקבל:

$$F_R = m \frac{v^2}{R} = 2mg(1 - \cos \theta)$$



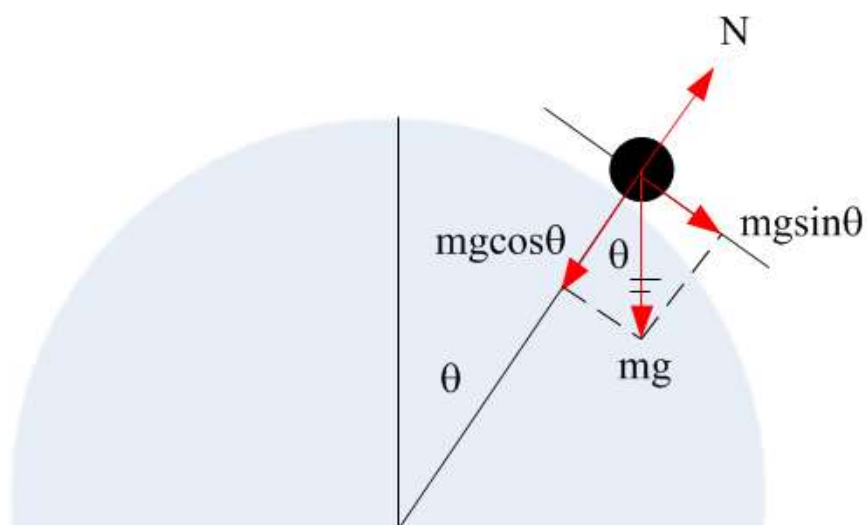
פתרון 1 המשך

5. מה ערכה של הזווית (הקריטית) בה ינתק הגוף מהמשטח?

◀ נפרק את mg לרכיבים על מנת לקבל את השקול בכיוון הרדיאלי, כמוסבר בסעיף 3.

◀ ברגע ההתנתקות ממשטח המסילה מתקיים $N=0$

◀ לכן, מהתוצאה של הסעיף הקודם:



$$F_R = \frac{mv^2}{R}$$

$$mg \cos \theta - N = 2mg(1 - \cos \theta)$$

$$g \cos \theta = 2g - 2g \cos \theta$$

$$\cos \theta = \frac{2}{3}$$

$$\theta_c = 48.19^\circ$$

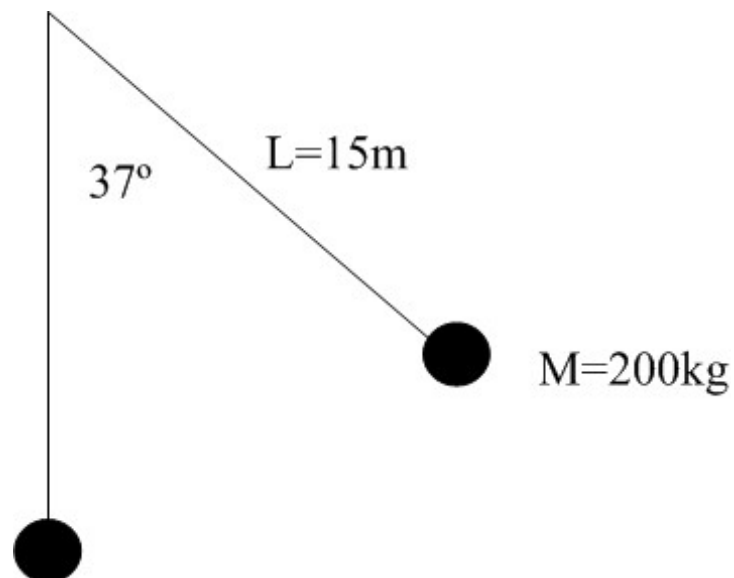
אל חבל מטוטלת שאורכו 15 מטרים מחובר כדור שמסתו 200 ק"ג.
הכדור מורם מזווית של 37° ומשוחרר, כך שהמטוטלת מתחילה להתנוודד במישור (זו לא מטוטלת קונית).

1. באיזה מצב נוצרת המתיחות המקסימלית בחבל?

2. מהי מתיחות זו?

3. באיזה מצב נוצרת המתיחות המינימלית בחבל?

4. מהי מתיחות זו?



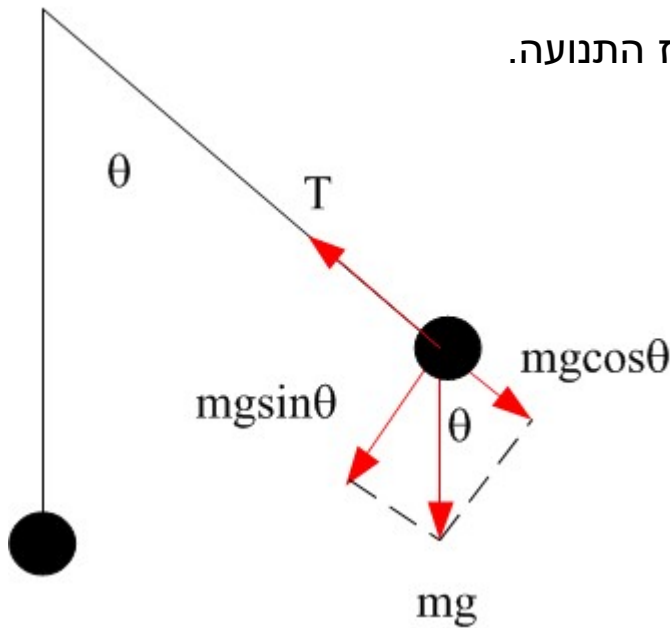
אל חבל מטוטלת שאורכו 15 מטרים מחובר כדור שמסתו 200 ק"ג.
הכדור מורם לזווית של 37° ומשוחרר, כך שהמטוטלת מתחילה להתנדוד במישור.

1. באיזה מצב נוצרת המתיחות המקסימלית בחבל?

◀ הכוח הצנטריפטלי הפועל על הגוף הוא שקול הכוחות בכיוון מרכז התנועה.

◀ התרשים מתאר את המצב בזווית כלשהי θ .

◀ נחשב את המתיחות:



$$F_R = m \frac{v^2}{R} = T - mg \cos \theta$$

$$T = m \frac{v^2}{R} + mg \cos \theta$$

◀ הערך המקסימלי של הביטוי מתקבל כאשר המהירות היא מקסימלית, והזווית היא 0 מעלות.

◀ הדבר מתרחש כאשר הגוף מצוי בנקודה הנמוכה ביותר במסלול.

פתרון 2 המשך

2. מהי מתיחות זו?

נעזר בביטוי מהסעיף הקודם: $T = m \frac{v^2}{R} + mg \cos \theta$

לצורך זה נחשב את מהירות הגוף בתחתית המסלול:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2$$

$$mgL(1 - \cos 37^\circ) = \frac{1}{2}mv^2$$

$$v^2 = 2gL(1 - \cos 37^\circ)$$

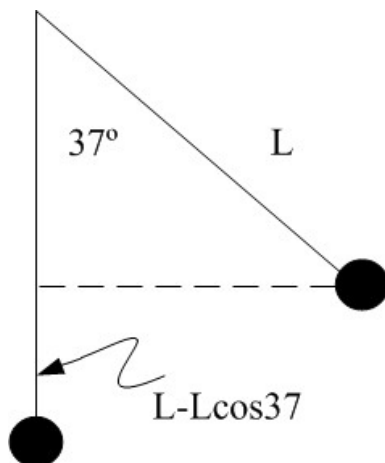
יש לזכור כי בתחתית המסלול מתקיים $\theta = 0$. נציב, ונקבל:

$$T = m \frac{v^2}{R} + mg \cos \theta$$

$$T = m \frac{2gL(1 - \cos 37^\circ)}{L} + mg \cos 0$$

$$T = mg[2(1 - \cos 37^\circ) + 1] = 200 \cdot 10 \cdot [3 - 2 \cos 37^\circ]$$

$$T = 2805.46 \text{ N}$$



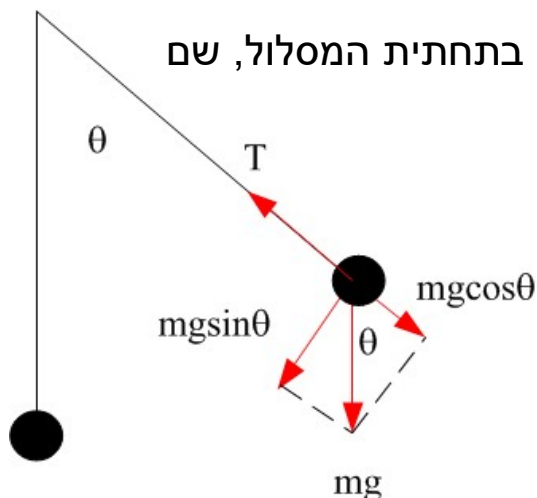
3. באיזה מצב נוצרת המתיחות המינימלית בחבל? מה ערכה?
 ניעזר שוב בביטוי שמצאנו בסעיף 1. כאמור, ביטוי זה מתאים לכל זווית θ :

$$T = m \frac{v^2}{R} + mg \cos \theta$$

- נתון והזווית המקסימלית היא 37° . כל זווית הקטנה ממנה תגדיל את ערך ה- $\cos$ שביטוי.
 בנוסף, הערך המינימלי של המהירות ($v=0$) מתקבל כאשר המהירות מתאפסת (וגם זה קורה בזווית המקסימלית).
 לכן, המהירות המינימלית מתקבלת כאשר הגוף מצוי בזווית של 37° , רגע לפני השחרור, ואז:

$$T = mg \cos \theta$$

- ככל שהגוף צובר מהירות כך גדלה המתיחות בחוט, עד לערכה המקסימלי בתחתית המסלול, שם כאמור המהירות היא הגדולה ביותר.

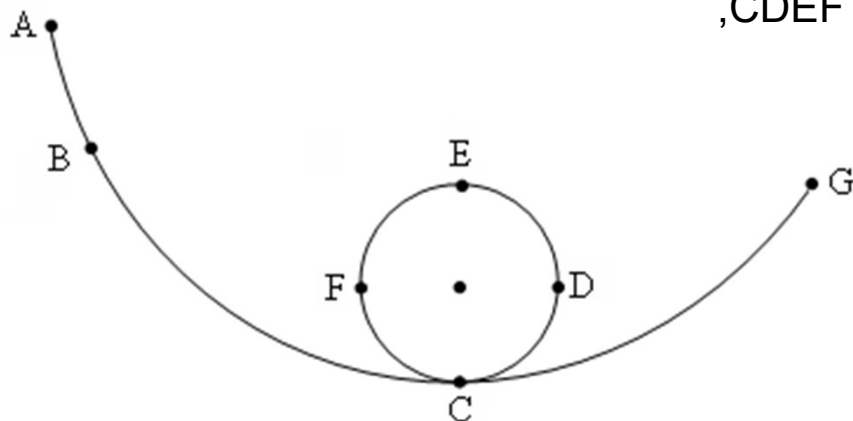


$$T = 200 \cdot 10 \cdot \cos 37$$

$$T_{\min} = 1597.27 N$$

בתרשים שלפניך מוצגת מסילה חסרת חיכוך ABCDEFG. קטע המסילה CDEF הוא מעגל ברדיוס $r=0.4\text{m}$. הנקודות C ו-E הן קצות הקוטר האנכי, והנקודות D ו-F הן קצות הקוטר האופקי. הנקודה A נמצאת בגובה 1.2m מעל הנקודה C.

גוף, שמסתו 0.2 kg וממדיו קטנים בהרבה מרדיוס המעגל CDEF, משוחרר ממנוחה מהנקודה A, ונע לאורך המסלול.



1. חשבו את הכוח (גודל וכיוון), שהמסילה מפעילה על הגוף בנקודה E.
2. הסבירו מדוע האנרגיה המכאנית הכוללת של הגוף נשמרת במהלך תנועתו. בתשובתכם התייחסו גם לפעולה של הכוח הנורמלי.
3. הסבירו מדוע מהירות הגוף הולכת וקטנה במהלך תנועתו מהנקודה C לנקודה E.
4. חשבו את הכוח שהגוף מפעיל על המסילה בנקודה F.
5. במקרה אחר שוחרר הגוף ממנוחה מהנקודה B, הנמצאת בגובה 0.9m מעל הנקודה C. האם במקרה זה הגוף יגיע לנקודה E? אם כן – חשבו את מהירות הגוף בנקודה E. אם לא – נמקו את תשובתכם.

נתון: $m=0.2\text{kg}$, $v_A = 0\text{m/s}$, $h_A = 1.2\text{m}$, $R=0.4\text{m}$

1. חשבו את הכוח (גודל וכיוון) שהמסילה מפעילה על הגוף בנקודה E.

◀ נמצא תחילה את מהירות הגוף בנקודה E.

◀ משיקולי אנרגיה:

$$mgh_A = mgh_E + \frac{mv_E^2}{2}$$

$$v_E^2 = 2g(h_A - h_E) = 2 \cdot 10(1.2 - 0.8) = 8 \left(\frac{\text{m}}{\text{sec}} \right)^2$$

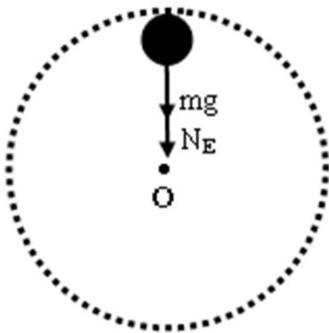
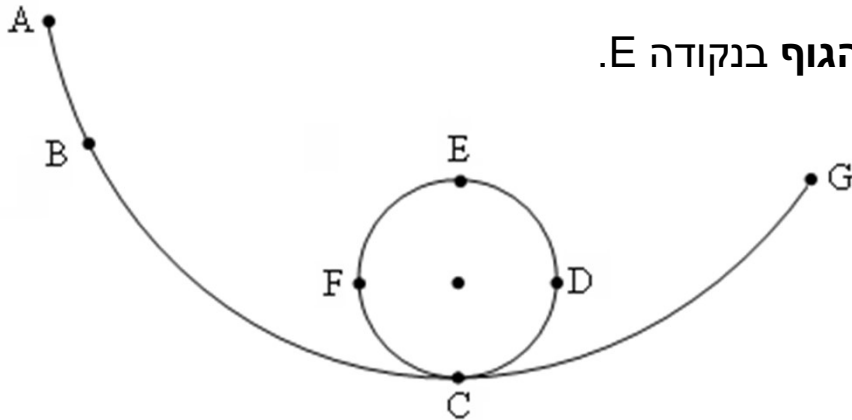
◀ על פי החוק השני של ניוטון, מתקיים בנקודה E:

$$\sum F_R = ma_R$$

$$N_E + mg = m \frac{v_E^2}{R}$$

$$N_E = m \frac{v_E^2}{R} - mg = \frac{0.2 \cdot 8}{0.4} - 0.2 \cdot 10 = 2\text{N}$$

◀ כיוונו של הכוח הוא אנכי מטה.



2. הסבירו מדוע האנרגיה המכאנית הכוללת של הגוף נשמרת במהלך תנועתו. בתשובתכם התייחסו גם לפעולה של הכוח הנורמלי.

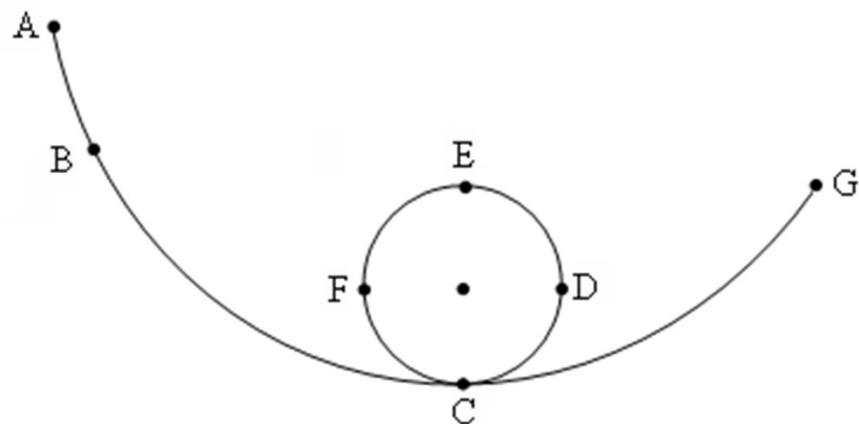
- ◀ הכוחות שפועלים על הגוף הם כוח הכובד והכוח הנורמלי.
- ◀ כוח הכובד הוא כוח משמר.
- ◀ הכוח הנורמלי מאונך למסלול בכל נקודה ונקודה ולכן אינו מבצע עבודה.
- ◀ העבודה שווה לשינוי באנרגיה ומאחר ולא בוצעה עבודה על ידי כוחות חיצוניים, לא חל שינוי באנרגיה המכאנית הכוללת.
- ◀ לכן, האנרגיה המכאנית הכוללת של הגוף נשמרת במהלך תנועתו.

3. הסבירו מדוע מהירות הגוף הולכת וקטנה במהלך תנועתו מהנקודה C לנקודה E.

◀ היות והאנרגיה המכאנית נשמרת, כאשר הכדור עולה האנרגיה הפוטנציאלית גדלה, ולכן האנרגיה הקינטית צריכה לקטון. מאחר והמסה של הכדור קבועה זה מחייב שמהירות הכדור תקטן.

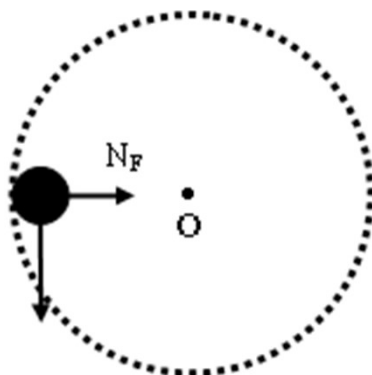
הסבר נוסף:

◀ בזמן שהכדור עולה מ-C ל-E רכיב כוח הכובד פועל בכיוון מנוגד לכיוון המהירות ולכן יש לו תאוצה משיקית המנוגדת למהירותו וגודל המהירות הולך וקטן.



פתרון 3 המשך

נתון: $m=0.2\text{kg}$, $v_A = 0\text{m/s}$, $h_A = 1.2\text{m}$, $R=0.4\text{m}$
 4. חשבו את הכוח שהגוף מפעיל על המסילה בנקודה F.
 משימור אנרגיה עבור נקודות A ו-F:



$$mgh_A = \frac{mv_F^2}{2} + mgh_F$$

$$10 \cdot 1.2 = \frac{v_F^2}{2} + 10 \cdot 0.4$$

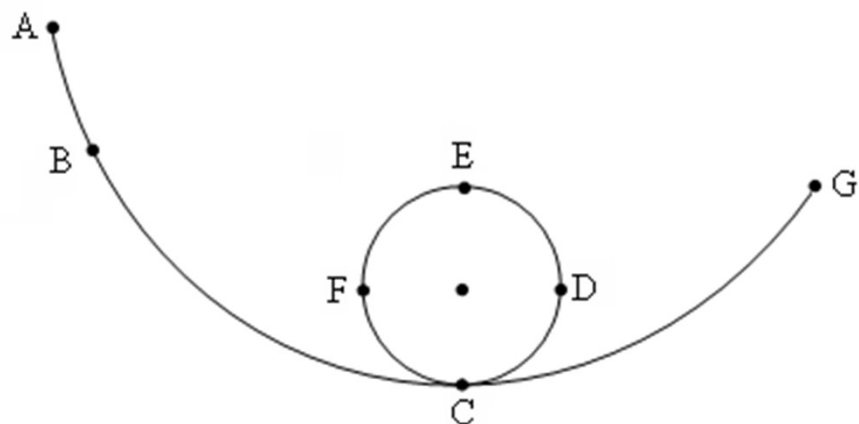
$$v_F^2 = 16 \left(\frac{m}{\text{sec}} \right)^2$$

לפי חוק שני בנקודה F:

$$\sum F_R = ma_R$$

$$N_F = \frac{mv_F^2}{R} = \frac{0.2 \cdot 16}{0.4} = 8\text{N}$$

בנקודה F הגוף מפעיל על המסילה כוח שכיוונו אופקי שמאלה וגודלו 8N.



פתרון 3 המשך

5. במקרה אחר, שוחרר הגוף ממנוחה מהנקודה B, הנמצאת בגובה 0.9m מעל הנקודה C. האם במקרה זה הגוף מגיע לנקודה E? אם כן – חשבו את מהירות הגוף בנקודה E. אם לא – נמקו את תשובתכם.

◀ נבדוק. הגוף יגיע לנקודה E אם מתקיים $N_E \geq 0$.

◀ לפי חוק שני:

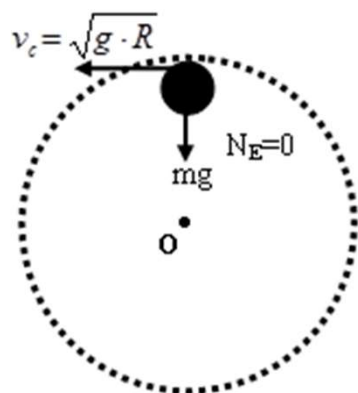
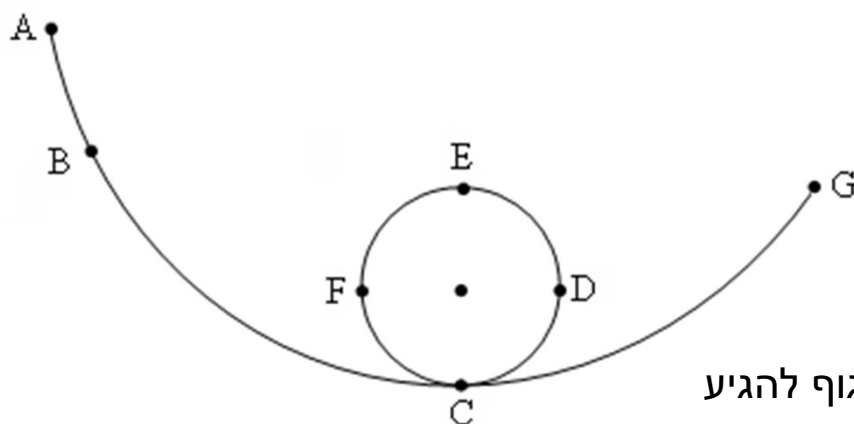
$$\sum F_R = ma_R$$

$$N + mg = \frac{mv_E^2}{R}$$

◀ את המהירות המינימאלית (הקריטית) שבה צריך הגוף להגיע לנקודה E מתקבלת כאשר $N_E = 0$:

$$mg = \frac{mv_E^2}{R}$$

$$v_E = \sqrt{gR} = \sqrt{10 \cdot 0.4} = 2 \frac{m}{sec}$$



פתרון 3 המשך

(המשך פתרון סעיף 5)

- ◀ נבדוק אם מהירות זו אכן מתקבלת.
- ◀ כאשר הכדור משוחרר מנקודה B מתקיים:

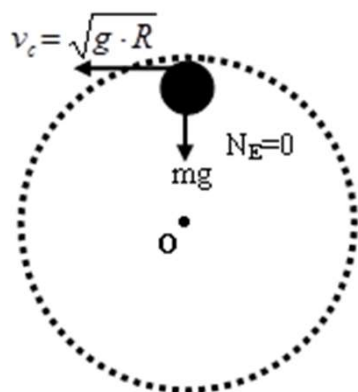
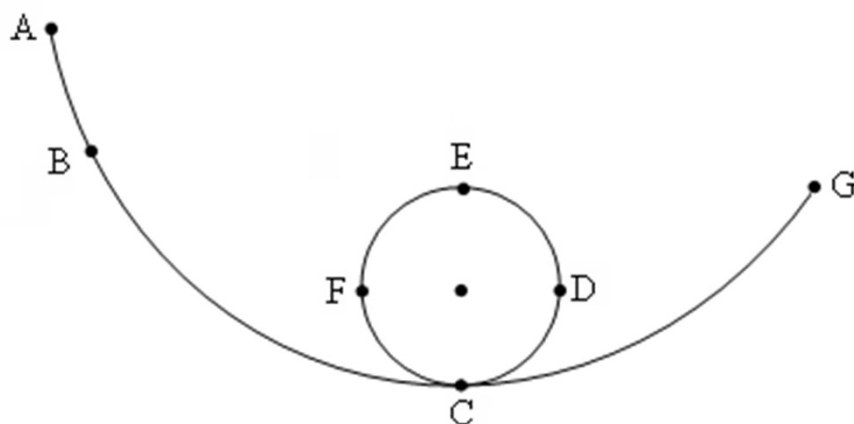
$$mgh_B = \frac{mv_E^2}{2} + mgh_E$$

$$10 \cdot 0.9 = \frac{v_E^2}{2} + 10 \cdot 0.8$$

$$v_E^2 = 2 \Rightarrow v_E = \sqrt{2} = 1.41 \frac{m}{sec}$$

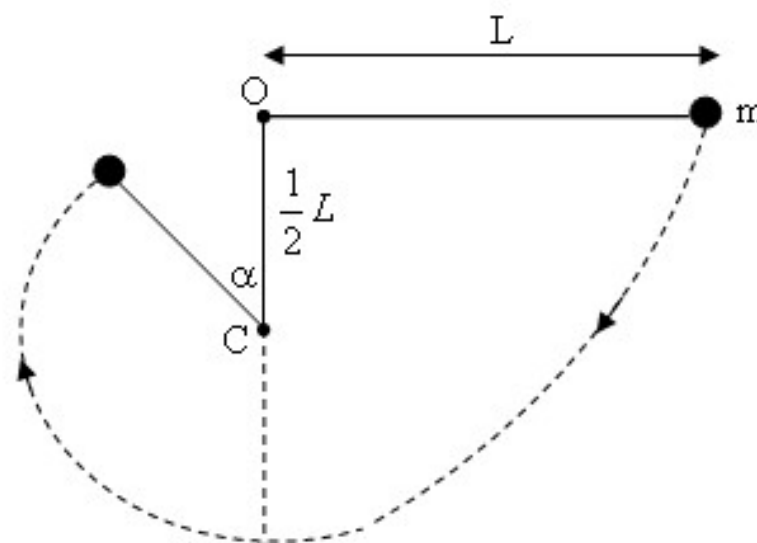
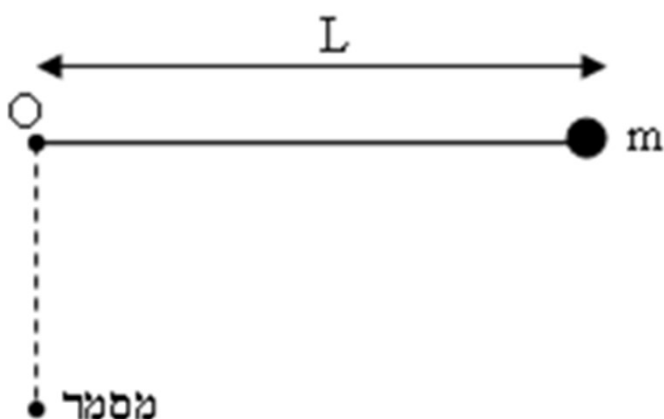
$$1.41 < 2 \Rightarrow v_E < v_c$$

- ◀ לכן הכדור אינו מגיע לנקודה E.



תרגיל 4 מבחינת הבגרות 1996

כדור קטן שמסתו m קשור לקצה חוט שאורכו L .
קצהו השני של החוט קבוע בנקודה O . הכדור משוחרר ממצב שבו החוט אופקי וישר.
כאשר החוט מגיע למצב אנכי, הוא נתקל במסמר התקוע בנקודה C , שנמצאת במרחק $L/2$ מתחת לנקודה O (ראו תרשים). המסמר ניצב למישור התנועה של החוט.



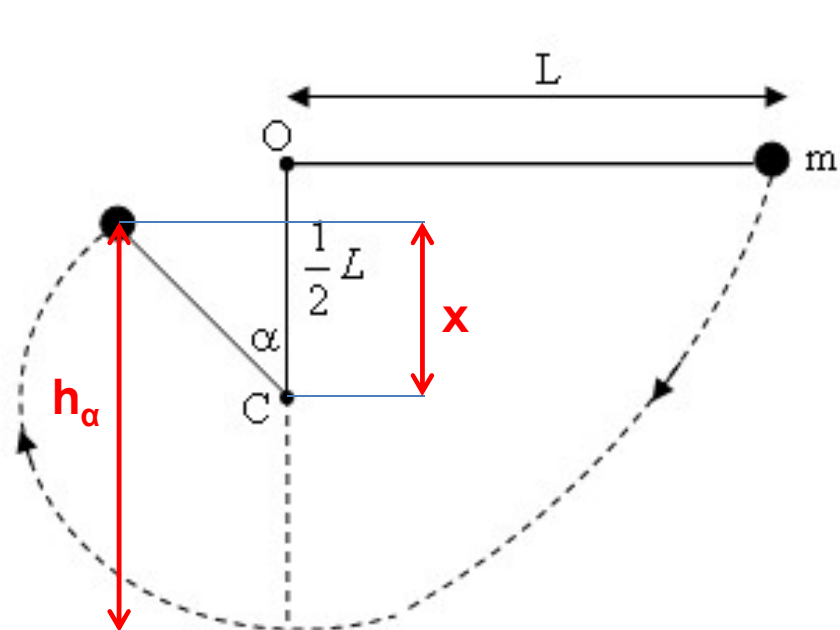
1. מהו הגודל של מהירות הכדור, כאשר החוט יוצר זווית α עם OC (ראה תרשים)?
בטאו את תשובתכם באמצעות L ו- α .
2. הראו כי ברגע שהמתיחות בחוט מתאפסת, מתקיים: $\cos(\alpha) = 2/3$.
3. מה תהיה צורת המסלול של הכדור, כל עוד המתיחות בחוט שווה אפס?
(קו ישר, מעגל, פרבולה, אחר?) נמקו.

פתרון 4

1. מהו הגודל של מהירות הכדור כאשר החוט יוצר זווית α עם OC (ראה תרשים)?
בטאו את תשובתכם באמצעות L ו- α .

◀ נמצא את מהירות הכדור על פי שימור האנרגיה.

◀ נבחר את מישור הייחוס לחישוב האנרגיה הפוטנציאלית הכובדית בנקודה הנמוכה ביותר של המסלול.



$$(1) mgL = mgh_{\alpha} + \frac{mv_{\alpha}^2}{2}$$

$$(2) h_{\alpha} = \frac{L}{2} + x$$

$$(3) \frac{x}{\frac{L}{2}} = \cos \alpha \Rightarrow x = \frac{L}{2} \cos \alpha$$

◀ נציב את x ב- (2):

$$(4) h_{\alpha} = \frac{L}{2} + \frac{L}{2} \cos \alpha$$

◀ נציב את ב- (1):

$$mgL = mg\left(\frac{L}{2} + \frac{L}{2} \cos \alpha\right) + \frac{mv_{\alpha}^2}{2} \Rightarrow$$

$$v_{\alpha}^2 = gL(1 - \cos \alpha)$$

$$v_{\alpha} = \sqrt{gL(1 - \cos \alpha)}$$

פתרון 4 המשך

2. הראו כי ברגע שהמתיחות בחוט מתאפסת, מתקיים: $\cos(\alpha) = 2/3$.

◀ על פי החוק השני של ניוטון:

$$\sum F = ma_R$$

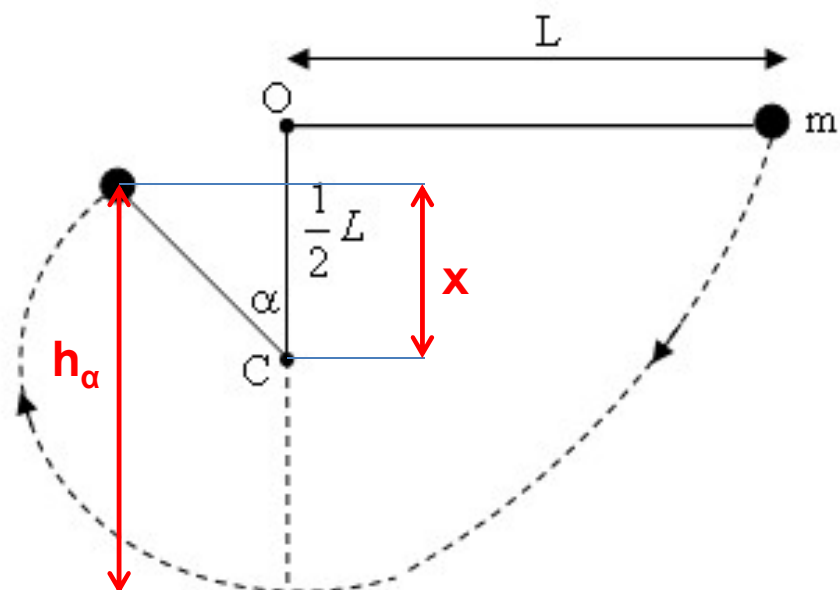
$$mg \cos \alpha + T = m \frac{v^2}{r} \Rightarrow r = \frac{L}{2}$$

◀ כאשר המתיחות מתאפסת $T=0$, לכן:

$$mg \cos \alpha = \frac{mgL(1 - \cos \alpha)}{\frac{L}{2}} = 2(1 - \cos \alpha)$$

$$\cos \alpha = 2 - 2 \cos \alpha$$

$$3 \cos \alpha = 2 \Rightarrow \cos \alpha = \frac{2}{3}$$

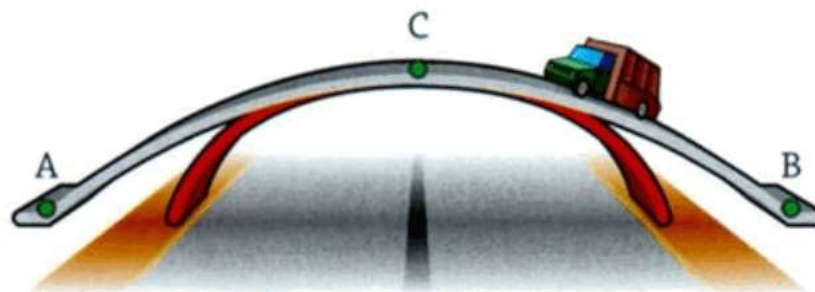


3. מה תהיה צורת המסלול של הכדור כל עוד המתיחות בחוט היא אפס (קו ישר, מעגל, פרבולה, אחר)? נמקו.

- ◀ במצב בו מתיחות החוט שווה לאפס, התנועה היא בהשפעת כוח הכובד בלבד.
- ◀ זוהי זריקה משופעת, לכן מסלול תנועת הגוף הוא פרבולה.

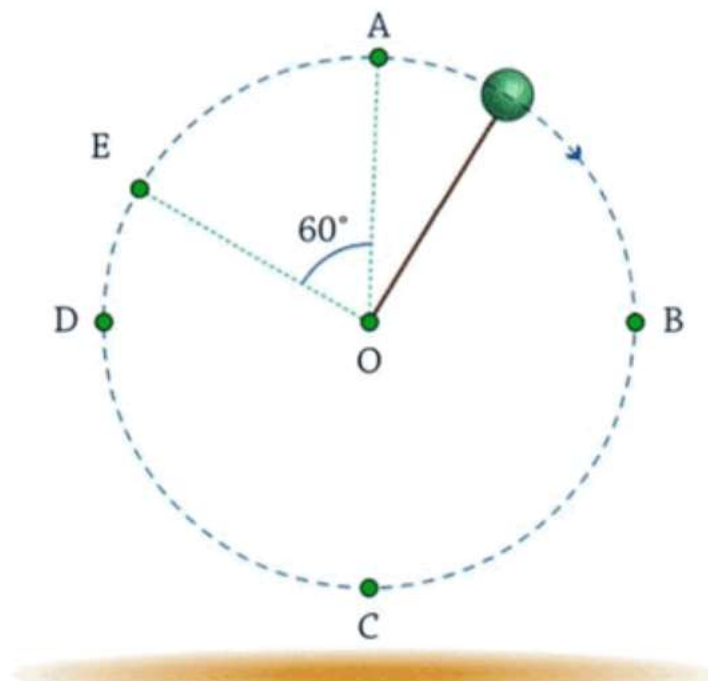
מכניקה ניוטונית חלק א' עמוד 328

29. גשר קמור, שצורתו קשת מעגל, עובר מעל כביש. המרחק על הקרקע, בין קצות הגשר A ו-B הוא 80 m. הנקודה הגבוהה ביותר של הגשר, C, נמצאת בגובה 7 מ' מעל הכביש. מהו הכוח בו מעיקה משאית שמסתה 5 טון על הגשר בנקודה C, אם היא עוברת בנקודה זו במהירות שגודלה 90 ק"מ\שעה?



מכניקה ניוטונית חלק א' עמוד 326

22. נער מסובב כדור במסלול מעגלי במישור אנכי באמצעות חוט שאורכו 0.6 מ' ומסתו זניחה. גובה מרכז המעגל O מעל הקרקע הוא 1.2 מ'. A היא הנקודה הגבוהה ביותר במסלול המעגלי, ומהירות הכדור בנקודה זו 2.5 מ'ש'. C היא הנקודה הנמוכה ביותר, והנקודות B ו D נמצאות בקצות הקוטר האופקי (ראו איור). מהירות הכדור בנקודה E היא 3.5 מ'ש'.



- א. מה יהיו סוגי התנועה (זריקה אנכית, זריקה אופקית, זריקה משופעת) אם הנער ישחרר את החוט בנקודות A, B, C, D ו-E? סרטוטו תרשימים איכותיים של מסלולי התנועה בכל אחד מחמשת המקרים.
- ב. מהו המרחק האופקי בין הנקודה בה פוגע הכדור בקרקע לבין מרכז המעגל:
- (1) כאשר הכדור משוחרר מהנקודה A?
- (2) כאשר הכדור משוחרר מהנקודה E?

תרגילים נוספים מהספר:

◀ פרק ה' עמוד 329: תרגילים 35, 36