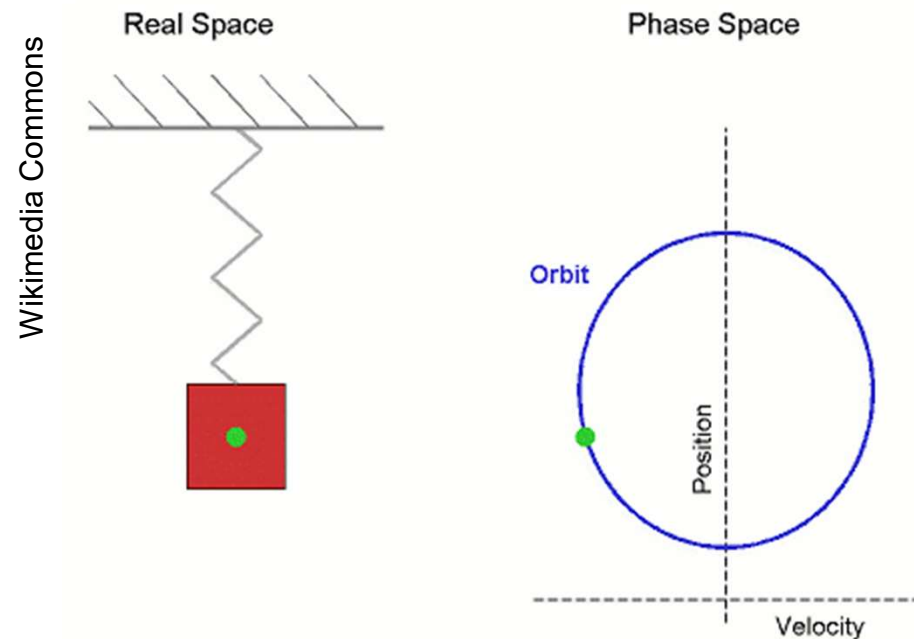


מכניקה

תנועה הרמונית פשוטה



- ◀ תנועה מחזורית (הקדמה)
- ◀ תנודה מחזורית
- ◀ הגדרה של תנועה הרמונית פשוטה (ת.ה.פ.).
- ◀ אפיון מתמטי של ת.ה.פ.
- ◀ הצגת ת.ה.פ. כהיטל על ציר של תנועה מעגלית קצובה
- ◀ כח הרמוני
- ◀ פיתוח פונקציות הת.ה.פ. כתלות בזמן
- ◀ חישוב זמן מעבר מנקודה לנקודה
- ◀ סיכום ת.ה.פ.-חלק א'
- ◀ נספחים :
- **נספח (1)** - אנליזת פורייה.
- **נספח (2)** - פיתוח נוסחאות הת.ה.פ. באמצעות פתרון המשוואה הדיפרנציאלית : $\ddot{x} = -cx$.
- **נספח (3)** -הצגה חליפית של פונקציות הת.ה.פ.

הקדמה: תנועה מחזורית (1)

- ▶ תופעות רבות בטבע ובטכנולוגיה מאופיינות בתנועה החוזרת ונשנית על עצמה. חלקיק יוצא מנקודה מסוימת במהירות מסוימת ותאוצה מסוימת וחוזר לאותה נקודה, לאותה מהירות ולאותה תאוצה, בכל פרק זמן קבוע הנקרא **זמן מחזור**.
- ▶ זמן מחזור זה מסומן בדרך כלל באות T.

- ▶ תנועות מחזוריות קיימות כמעט בכל קטגוריה פיסיקלית: מכניקה קלאסית, תרמודינמיקה, תורת הקוונטים, תורת היחסות ועוד...

דוגמאות:

- ❖ תנועה מעגלית קצובה
 - ❖ תנועה אליפטית של פלנטות
 - ❖ חלקיק הקשור לקצה קפיץ הרתום לקיר.
 - ❖ חלקיק הנע הלוך וחזור בתוך שדה כח (בור פוטנציאל).
 - ❖ גלים מחזוריים: תנודות מיתר, גלי קול, גלי אור ועוד...
 - ❖ מעגלי זרם חילופין
- ועוד תופעות רבות..

הקדמה: תנועה מחזורית (2)

◀ תנועה מחזורית:

◀ <https://phet.colorado.edu/en/simulation/gravity-and-orbits>

◀ המאפיין המתמטי של תנועה מחזורית של חלקיק (n מייצג מספר שלם) :

$$\vec{r}(t + nT) = \vec{r}(t)$$

$$\vec{v}(t + nT) = \vec{v}(t)$$

$$\vec{a}(t + nT) = \vec{a}(t)$$

כאשר :

$\vec{r}(t)$ מייצג את וקטור המיקום.

$v(t)$ מייצג את וקטור המהירות.

$a(t)$ מייצג את וקטור התאוצה.

המשמעות: בתום כל זמן מחזור T, ישוב החלקיק לאותו מיקום, לאותה מהירות ולאותה תאוצה.

◀ **תנועה מחזורית** היא מקרה פרטי של תנועה מחזורית.

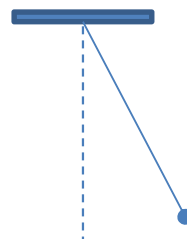
◀ תנועה מחזורית תיקרא **תנועה** אם הגוף נע הלך ושוב בין שתי נקודות קצה שאינן מתלכדות.

דוגמאות:

◀ כדור הנע הלך ושוב על משטח אופקי חלק התחום ע"י שני קירות :

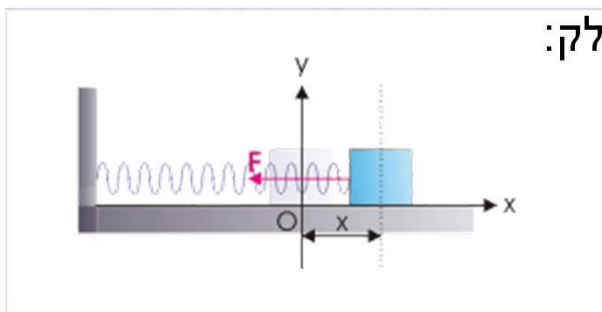


◀ כדור מנתר אלסטית לחלוטין, הלך ושוב, על פני משטח אופקי :



◀ מטוטלת :

◀ גוף קשור לקפיץ רתום המתנודד על גבי משטח חלק:



◀ **תנועה הרמונית פשוטה** (המסומנת בקיצור: **ת.ה.פ**) הינה **מקרה פרטי של תנודה**.

◀ חשיבותה הרבה נעוצה בכך, שהיא מהווה תיאור מדויק או מקורב של תנודות מחזוריות רבות הנפוצות בטבע או בתעשייה. (ראו הרחבה בהמשך, נספח א').

◀ **מאפייני התנועה ההרמונית הפשוטה:**

❖ זוהי תנודת חלקיק שהיא: **מחזורית וסימטרית** סביב נקודה מרכזית הנקראת: **נקודת שיווי משקל (נ.ש.מ)**.

❖ החלקיק מתנודד לאורך מסלול ישר או עקום.

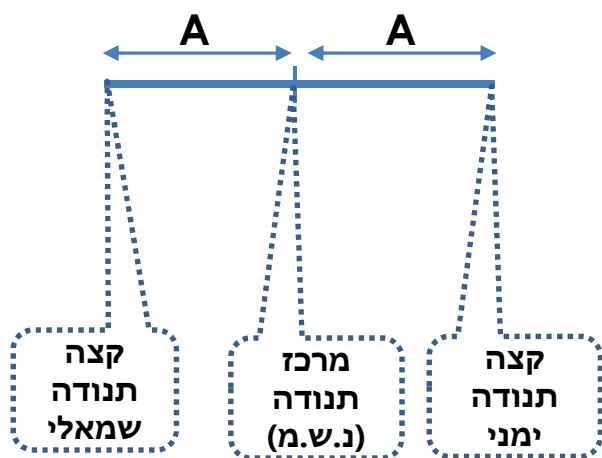
❖ בשני קצוות המסלול החלקיק נעצר רגעית.

❖ במרכז התנודה (בנ.ש.מ) מתקיים:

(1) מהירותו של החלקיק **מקסימלית**.

(2) הכח השקול בכיוון המשיק למסלול מתאפס.

לכן מוצדק השם: נקודת שיווי משקל.

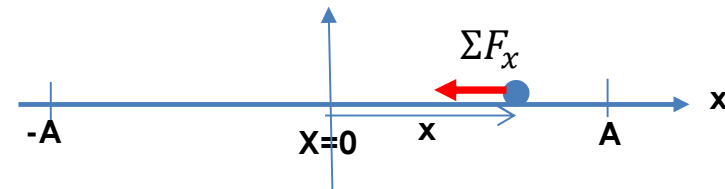
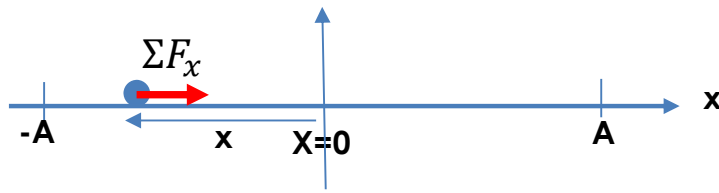


◀ אורך המסלול מנקודת שיווי המשקל אל כל אחד מקצוות המסלול נקרא: **מְשָׁרַעַת** (**אמפליטודה**). סימון מקובל לאמפליטודה: A .

◀ הערה: ישנן תנודות רבות המקיימות את כל המאפיינים הנ"ל ולמרות זאת אינן הרמוניות פשוטות. לכן נדרשת הגדרה מתמטית חד משמעית עבור התנודה המסוימת הזו, הנקראת "תנועה הרמונית פשוטה".

אפיון מתמטי של תנועה הרמונית פשוטה (1)

- ▶ מטעמי נוחות, נדון תחילה בתנועה הרמונית פשוטה לאורך קו ישר.
- ▶ זוהי תנודה חד ממדית, לכן נוכל לפשט את הרישום ולהימנע מרישום וקטורי.
- ▶ על ציר X נקבע את הראשית במרכז התנודה.
- ▶ כדי שחלקיק יתנווד סביב מרכז התנודה (לאו דווקא בתנועה הרמונית פשוטה), חייב רכיב ה- X של שקול הכוחות להיות **כוח מחזיר**. כלומר, הוא חייב להיות **מכוון אל מרכז התנודה**.



- ▶ לצורך המחשה, תוכלו להתנסות בסימולציה של PheT:
https://phet.colorado.edu/sims/mass-spring-lab/mass-spring-lab_en.html

אפיון מתמטי של תנועה הרמונית פשוטה (2)

◀ כדי שתנודה מחזורית תיקרא **תנועה הרמונית פשוטה**, חייב להתקיים:

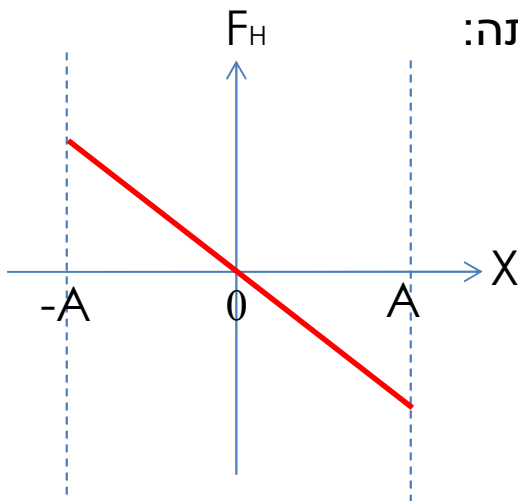
1. הכוח המחזיר השקול, הפועל על החלקיק המתנווד, חייב להיות מכוון אל מרכז התנודה.

2. הכוח המחזיר חייב להיות פרופורציוני להעתקו של החלקיק.

את העתקו של החלקיק מודדים מנקודת שיווי המשקל (מרכז התנודה: $x = 0$) אל מיקומו הרגעי של החלקיק.

◀ את המאפיינים הללו ניתן לסכם בנוסחה המתמטית ובגרף המתאר אותה:

$$\Sigma F_x = F_H = -cx$$



◀ כאשר

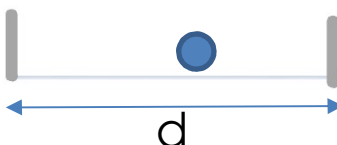
❖ c הוא קבוע כלשהו, שיחידותיו (בשיטת היחידות S.I) הן: $\left[\frac{N}{m}\right]$

❖ x הוא מיקומו (העתקו) הרגעי של החלקיק.

❖ F_H הוא הכוח ההרמוני.

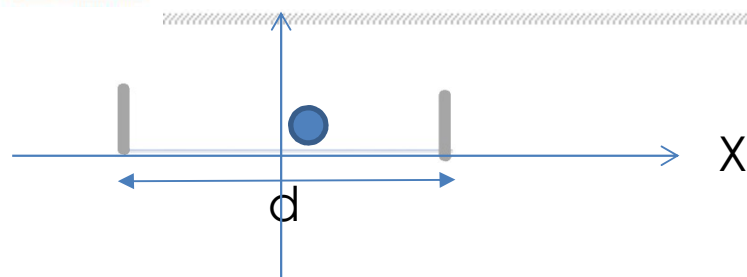
◀ כדור מתנווד בתנודה מחזורית על משטח אופקי וחלק תוך שהוא מתנגש אלסטית וחזיתית בקיר.

ראו איור:



- גודל מהירותו של הכדור בעת שהוא נע בין שני הקירות הוא v .
 קבעו את מרכז התנודה באמצע המרווח בין שני הקירות.
 סמנו את ציר X כפונה ימינה.
- א- חשבו את אמפליטודת התנודה.
 - ב- האם זו תנודה מחזורית?
 - ג- אם זו תנודה מחזורית-חשבו את זמן המחזור.
 - ד- האם זו תנועה הרמונית פשוטה?

פתרון דוגמא 1



פתרון סעיף א' ◀

אמפליטודת התנודה היא: $A = \frac{d}{2}$.

פתרון סעיף ב' ◀

התנודה היא מחזורית, סימטרית סביב נקודת מרכז התנודה.

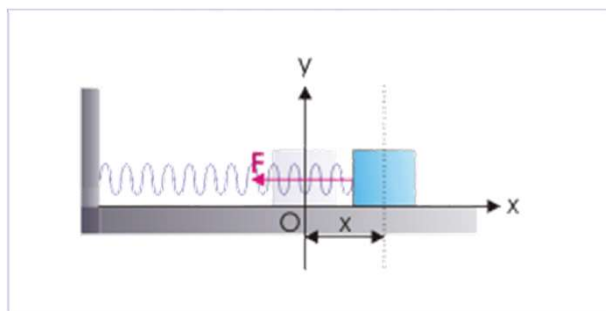
פתרון סעיף ג' ◀

זמן המחזור הוא זמן מהלך הכדור מקצה לקצה ובחזרה: $T = 2 \frac{d}{v}$

פתרון סעיף ד' ◀

התנודה אינה הרמונית פשוטה מאחר ועל הכדור (בנקודה כללית x כלשהי, ביחס למרכז התנודה) לא מתקיים האפיון ההרמוני: $\Sigma F_x = -cx$ מאחר וכאן: $\Sigma F_x = 0$

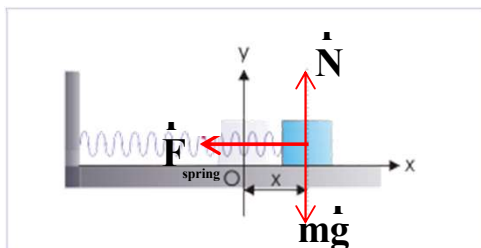
◀ קוביית עץ קטנה קשורה לקצהו של קפיץ בעל קבוע K הרתום בקצהו השני לקיר. ראו איור:
כשהקובייה נמצאת בנקודה O - הקפיץ רפוי.
הקובייה מונחת על משטח אופקי וחלק.
מושכים את הקובייה בשיעור A (קצה אמפליטודה) ומשחררים אותה לתנועה ספונטאנית.
הקובייה תבצע תנודות סימטריות סביב הנקודה O .



- א- הסבירו מדוע הנקודה O היא נקודת שיווי משקל.
- ב- הוכיחו, על פי שיקולים אנרגטיים, שתנודת הקובייה סימטרית סביב נקודת שיווי המשקל.
- ג- הוכיחו, על פי אפיון הת.ה.פ, שהתנודה היא אכן תנועה הרמונית פשוטה.

פתרון דוגמא 2

פתרון סעיף א'



הכוח הקפיצי הוא הכוח היחיד הפועל על הקובייה בכיוון ציר X. בנקודה O הקפיץ רפוי ולכן הכוח הקפיצי מתאפס. כלומר-זוהי נקודת שיווי משקל.

פתרון סעיף ב'

עלינו להוכיח שאם נשחרר את הקובייה בנקודה $X=A$ היא תיעצר רגעית ב $X=-A$. הכוח הקפיצי הוא כוח משמר. הכוח הנורמאלי וכוח הכובד מאונכים בכל נקודה לכיוון העתק הקובייה, לכן אינם מבצעים עבודה. לפיכך מתקיים שימור אנרגיה מכאנית על הקובייה. נניח שהקובייה תיעצר רגעית בנקודה B כלשהי. אזי:

$$U_{eA} = U_{eB} \Rightarrow \frac{1}{2} k x_A^2 = \frac{1}{2} k x_B^2 \Rightarrow x_B^2 = x_A^2 \Rightarrow x_B = \pm x_A$$

ומכאן:

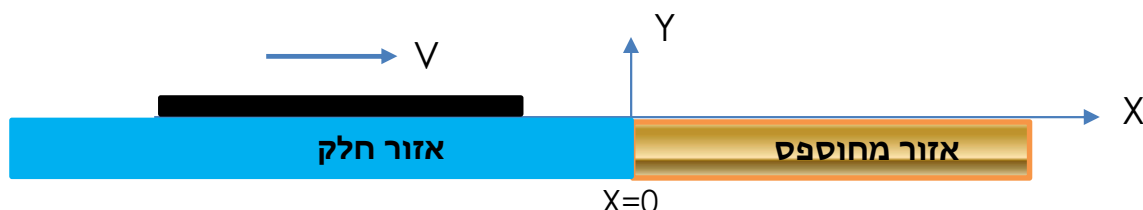
B נקודה שונה מ A ולכן :

$$x_B = -x_A = -A$$

פתרון סעיף ג'

בנקודה X כללית: $\Sigma F_x = -kx$. כלומר הכוח הוא ליניארי מחזיר. לכן זו ת.ה.פ שקבועה הוא קבוע הקפיץ $c = k$.

◀ מוט אחיד שאורכו L ומסתו M נע על משטח אופקי וחלק כשהוא מקביל לציר X (ראו איור).

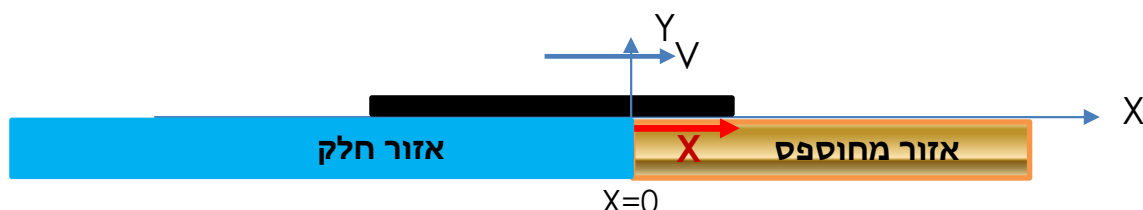


כשקצהו הקדמי של המוט מגיע לקואורדינאטה $x=0$, חודר המוט לאזור מחוספס. הניחו שמהירות המוט מספיק גדולה, כך שהוא מצליח לחדור במלוא אורכו אל תוך האזור המחוספס.

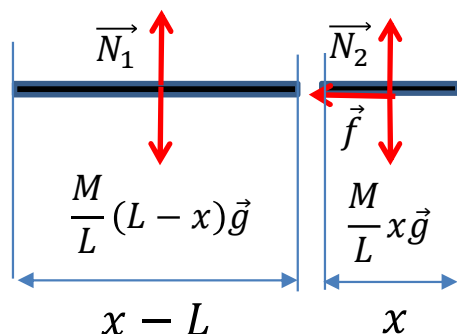
הוכיחו שתוך כדי חדירתו של המוט לאזור המחוספס, נע המוט בתנועה הרמונית פשוטה, עד שמסתיימת חדירתו אל תוך האזור המחוספס (מרגע זה נע המוט בתאוצה קבועה).
הערה: זוהי כמובן אינה תנודת הלוך וחזור אבל בתהליך חדירת המוט אל תוך האזור המחוספס מתקיים האפיון ההרמוני.

פתרון דוגמא 3

◀ נתבונן במוט כשקצהו הקדמי נמצא בקואורדינטה x מימין לנקודה $x=0$.



החיכוך יוצר כוח המכוון בכיוון x השלילי. כוח זה מושפע רק מהכוח הנורמאלי של חלק המוט הנמצא בתוך האזור המחוספס. נסמן את הכוחות על המוט, אך נפריד בין חלקו השמאלי לבין חלקו הימני של המוט:



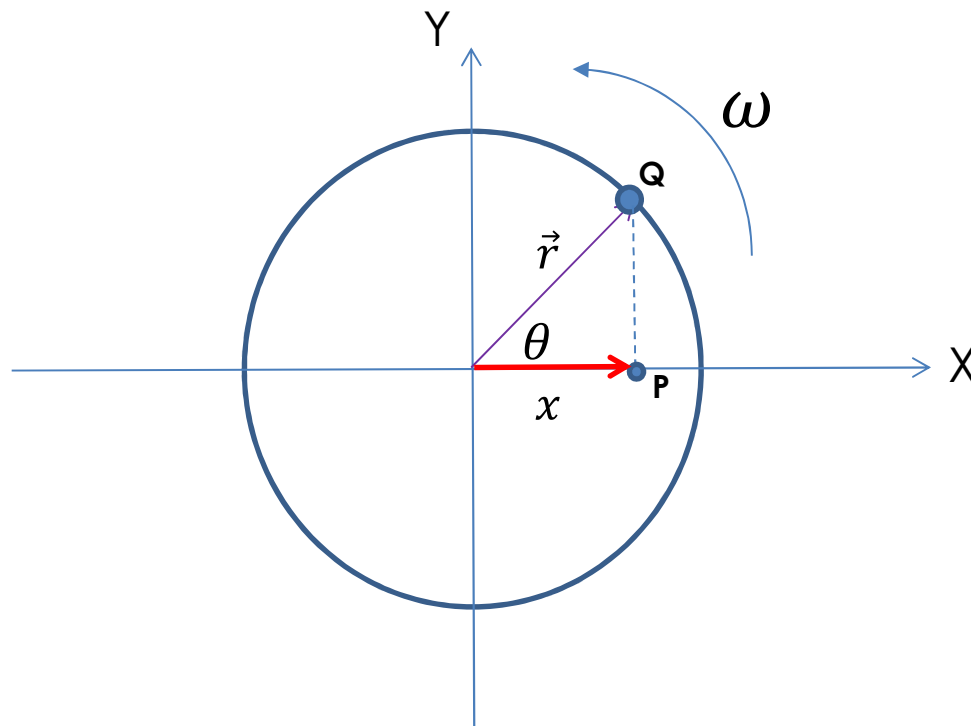
החלק הרלוונטי של המוט-עליו פועל כוח (חיכוך) בכיוון x הוא החלק הימני של האיור.

$$\Sigma F_x = -f = -\mu N_1 = -\underbrace{\left[\mu \frac{M}{L} g \right]}_C \cdot x = -Cx$$

כלומר, מדובר בתנועה הרמונית פשוטה.

הקדמה לפיתוח נוסחאות הת.ה.פ.

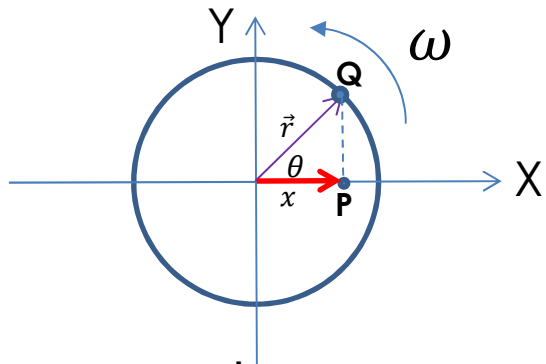
- ◀ הוכיחו, שההיטל על ציר X , של נקודה המסתובבת במעגל בתנועה קצובה, במהירות זוויתית ω יוצר על ציר X תנועה הרמונית פשוטה.
 - ◀ מעגל זה יכולה בהמשך מעגל הרמוני.
- (הוכחה זו תהווה בסיס לפיתוח נוסחאות הת.ה.פ.).



◀ על פי חוק שני של ניוטון:

$$(1) \Sigma \vec{F} = m\vec{a}$$

◀ תנועה הרמונית פשוטה היא תנועה חד ממדית, המאופיינת ע"י:



$$(2) \Sigma F_x = ma_x = -cx$$

◀ לכן, אם נוכיח שתאוצת ההיטל מכוונת תמיד אל מרכז התנועה והיא פרופורציונית למיקום x-
הרי שהוכחנו כי מדובר בתנועה הרמונית פשוטה.

◀ הנקודה P הינה ההיטל של הנקודה Q, המסתובבת על פני המעגל בתנועה קצובה.

◀ על פי (2) נרצה להוכיח כי:

$$(3) a_x = -\frac{c}{m}x$$

◀ הנקודה Q, המסתובבת במעגל, מואצת בתאוצה צנטריפטאלית:

◀ לפיכך נקודת ההיטל P, מואצת בכיוון מרכז התנועה בתאוצה: $(4) |\vec{a_Q}| = \omega^2 r$

$$(5) a_P = -\omega^2 (r \cos \theta) \Rightarrow (6) a_P = -\omega^2 x$$

מ.ש.ל

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{m}}$$

וכך נקבל גם קשר חשוב (זכרו אותו):

פיתוח מתמטי של פונקציות התנועה ההרמונית הפשוטה

◀ נציג שתי דרכים לפיתוח פונקציות הת.ה.פ. כתלות בזמן:

דרך א'- על פי תנועת ההיטל, על ציר x, של נקודה המסתובבת במעגל בתנועה קצובה.

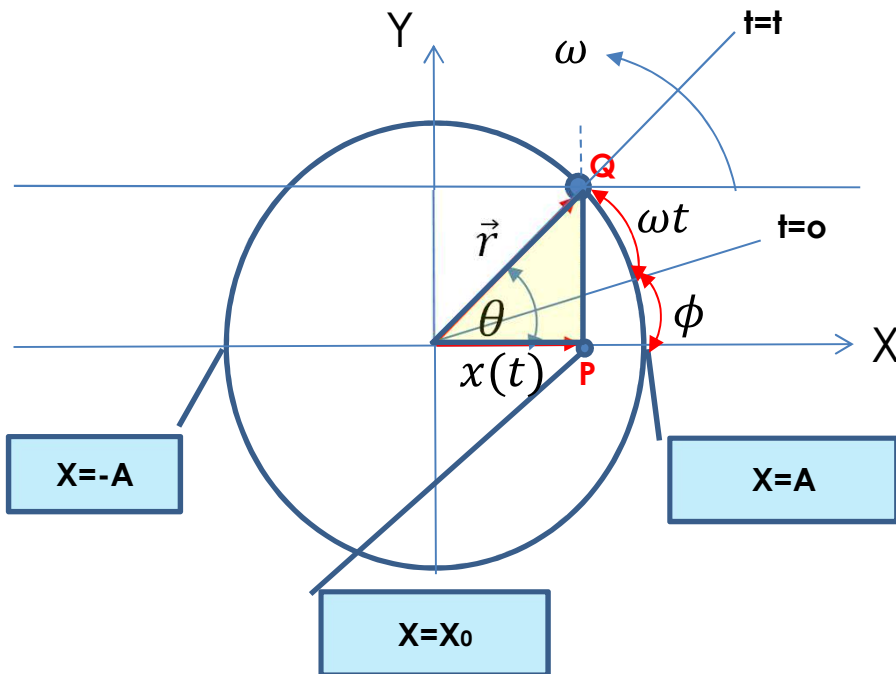
דרך ב'- עושה שימוש בנגזרות.

◀ הערה: פיתוח מתקדם יותר (פתרון משוואה דיפרנציאלית) מוצג בנספח ב'.

דרך א' - על פי תנועת ההיטל של נקודה המסתובבת במעגל בתנועה קצובה (1).

▶ נתבסס על תנועת ההיטל p , על ציר X , של נקודה Q המסתובבת במעגל אשר רדיוסו $r=A$. בזמן $t=0$ נמצאה הנקודה p ב- x_0 ומהירותה הייתה v_0 . זווית המופע (הפאזה) תיקרא ϕ (Phi, פִּי).

▶ נחליף את הסימון r של רדיוס המעגל באות A . שכן A היא אמפליטודת התנועה ושווה, כמובן, ל r .



1. חישוב מיקום ההיטל:

על פי האזור נרשום:

$$(1) \quad x(t) = A \cos \theta$$

מתנועה מעגלית: $\theta = \omega t + \phi$

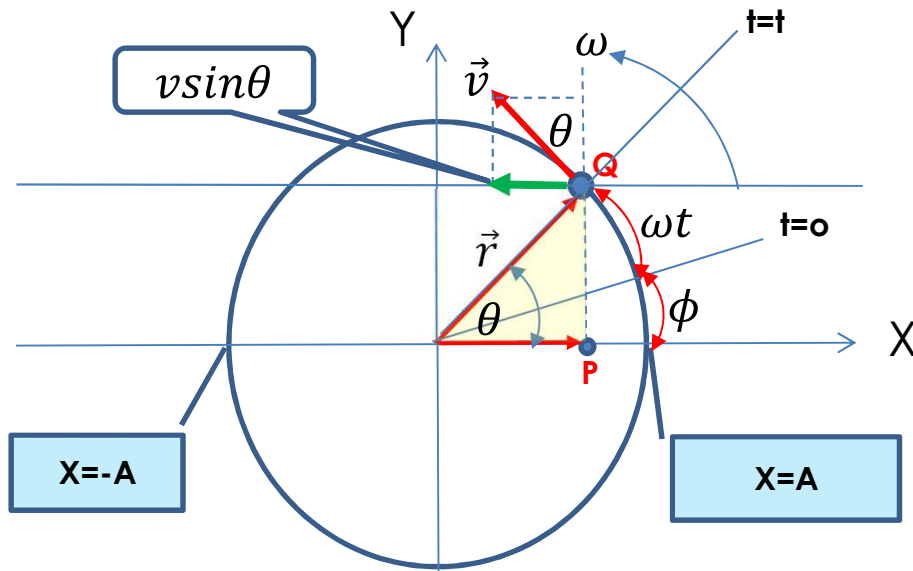
נציב במשוואה (1) ונקבל:

$$(2) \quad x(t) = A \cos(\underbrace{\omega t + \phi}_{\theta})$$

דרך א' - על פי תנועת ההיטל של נקודה המסתובבת במעגל בתנועה קצובה (2).

2. חישוב מהירות ההיטל:

◀ על פי האורך נרשום :



$$(1) \quad v(t) = -v \sin \theta = -\omega A \sin \theta$$

(מהירות ההיטל מכוונת אל הכיוון השלילי של ציר x)

$$\theta = \omega t + \phi : \text{ מתנועה מעגלית}$$

נציב במשוואה (1) ונקבל:

$$(2) \quad v(t) = -\omega A \sin(\underbrace{\omega t + \phi}_{\theta})$$

דרך א' - על פי תנועת ההיטל של נקודה המסתובבת במעגל בתנועה קצובה (3).

3. חישוב תאוצת ההיטל:

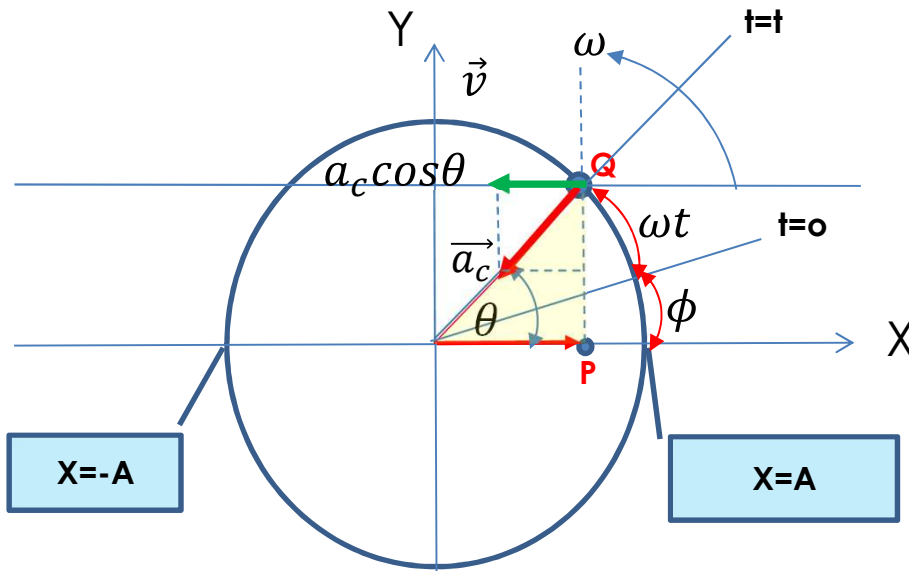
◀ על פי האיור נרשום:
(תאוצת ההיטל מכוונת אל הכיוון השלילי של ציר x)

$$(1) \quad a(t) = -a_c \cos \theta = -\omega^2 A \cos \theta$$

מתנועה מעגלית: $\theta = \omega t + \phi$

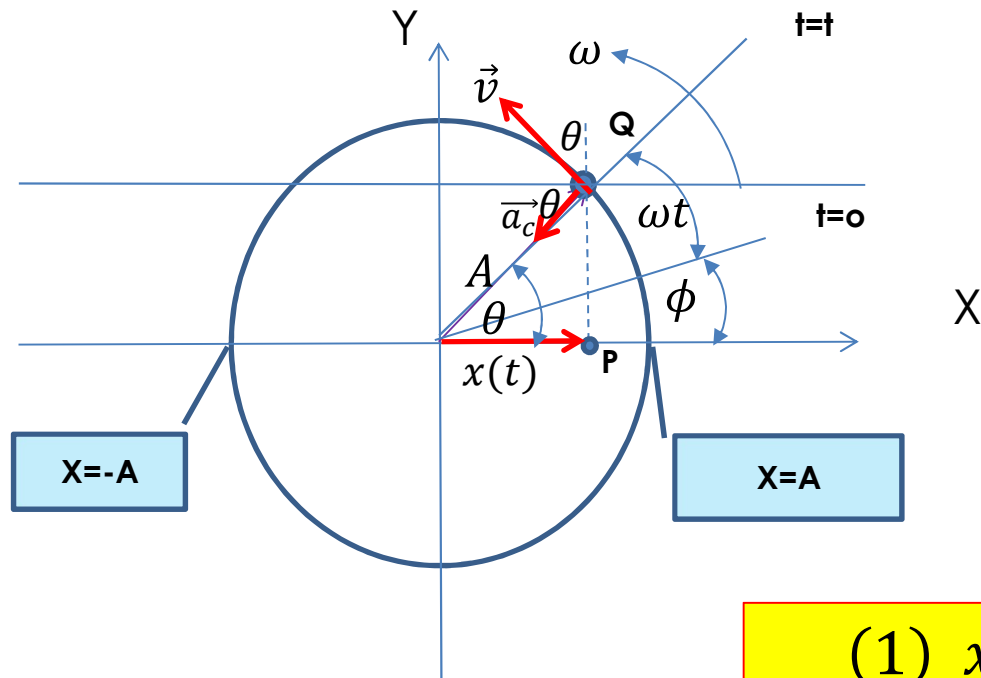
נציב במשוואה (1) ונקבל:

$$(2) \quad a(t) = -\omega^2 A \cos(\underbrace{\omega t + \phi}_{\theta})$$



דרך א' - על פי תנועת ההיטל של נקודה המסתובבת במעגל בתנועה קצובה (4).

◀ סיכום פונקציות הת.ה.פ כתלות בזמן:



$$(1) \quad x(t) = A \cos(\underbrace{\omega t + \phi}_{\theta})$$

$$(2) \quad v(t) = -\omega A \sin(\underbrace{\omega t + \phi}_{\theta})$$

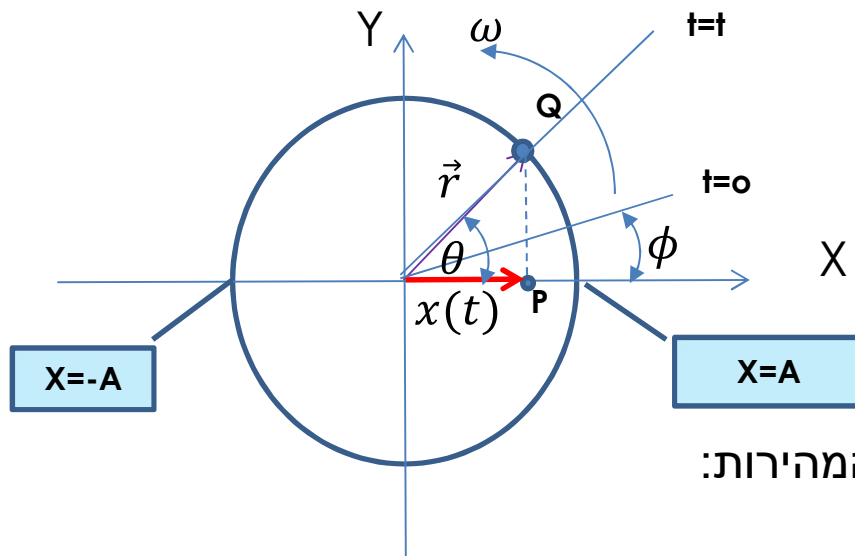
$$(3) \quad a(t) = -\omega^2 A \cos(\underbrace{\omega t + \phi}_{\theta})$$

דרך ב' - בסיוע נגזרות

◀ נחליף את הסימון r של רדיוס המעגל באות A . שכן A היא אמפליטודת התנועה ושווה, כמובן, ל r .

◀ על פי המעגל נרשום:

$$(1) \quad x(t) = A \cos(\underbrace{\omega t + \phi}_{\theta})$$



◀ נגזור את x לפי משתנה הזמן t , על מנת לקבל את המהירות:

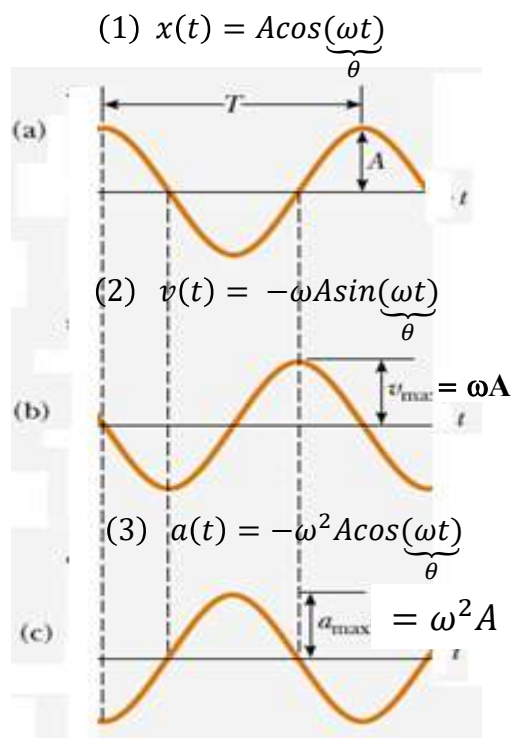
$$(2) \quad v(t) = \dot{x} = -\omega A \sin(\underbrace{\omega t + \phi}_{\theta})$$

◀ נגזור שוב, הפעם את V לפי משתנה הזמן t על מנת לקבל את התאוצה:

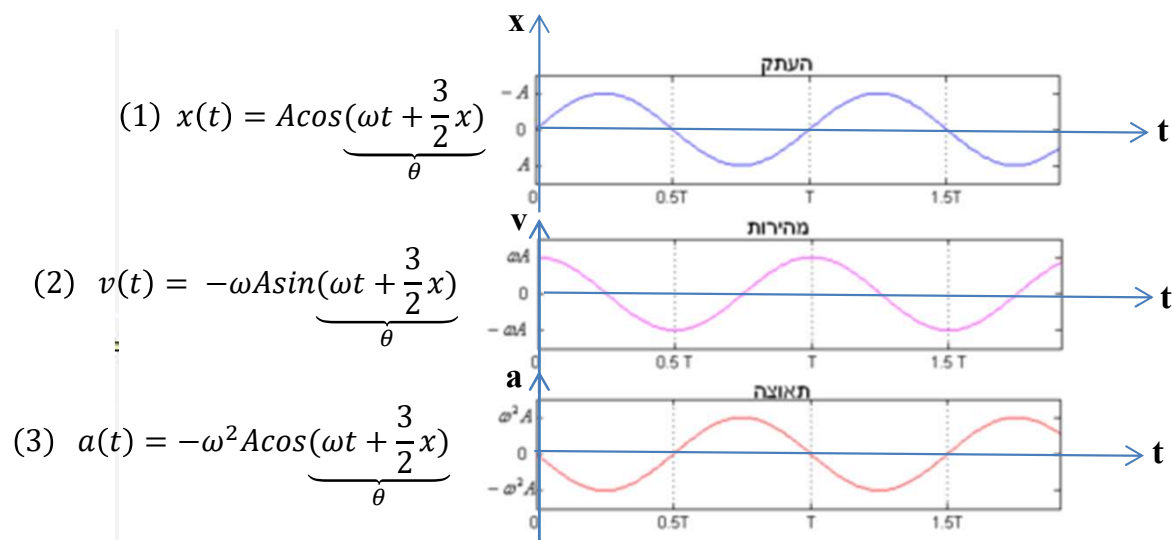
$$(3) \quad a(t) = \dot{v} = -\omega^2 A \cos(\underbrace{\omega t + \phi}_{\theta})$$

הגרפים המתארים ת.ה.פ. כתלות בזמן

$$\varphi = 0$$



$$\varphi = \frac{3}{2} \pi_{\text{radians}} = 270^\circ$$



נלקח מוויקיפדיה + תוספות שלי

המחשה דינמית של ת.ה.פ. המבוססת על כח קפיצי :

<https://www.youtube.com/watch?v=eeYRkW8V7Vg&feature=youtu.be>

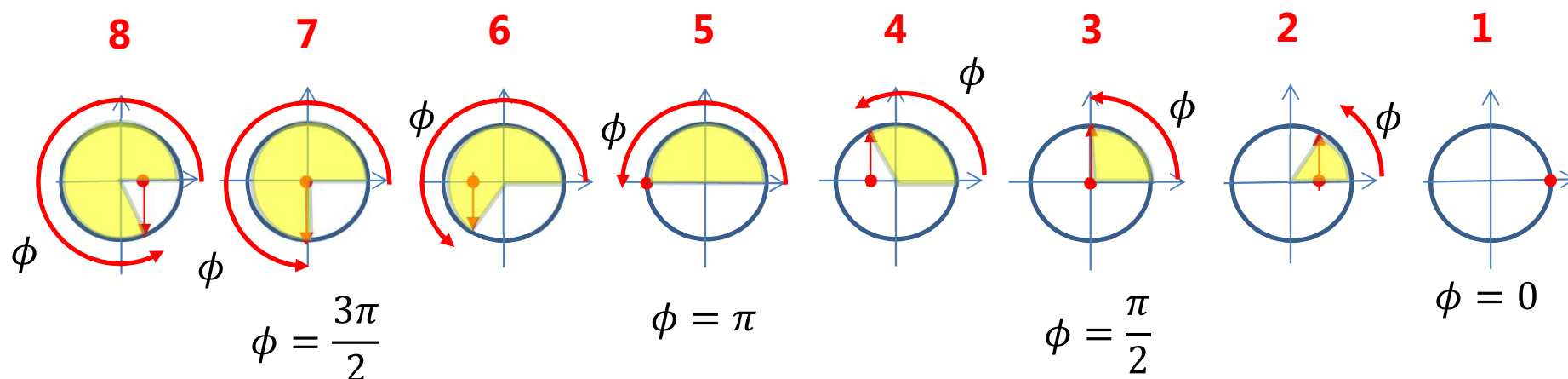
"Xva" מאת - yohai - נוצר על ידי מעלה היצירה. מתפרסם לפי רישיון נחלת הכלל דרך ויקישיתוף - <http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Xva.png#/media/File:Xva.png>

◀ זווית המופע נקבעת ע"י תנאי ההתחלה: המיקום ההתחלתי X_0 ומהירות ההתחלתית V_0

◀ ישנן דרכים שונות לחישוב זווית המופע. בדרך כלל על בסיס מתמטי.

◀ אנחנו נציג כאן דרך המבוססת על **ציור** תנאי ההתחלה.

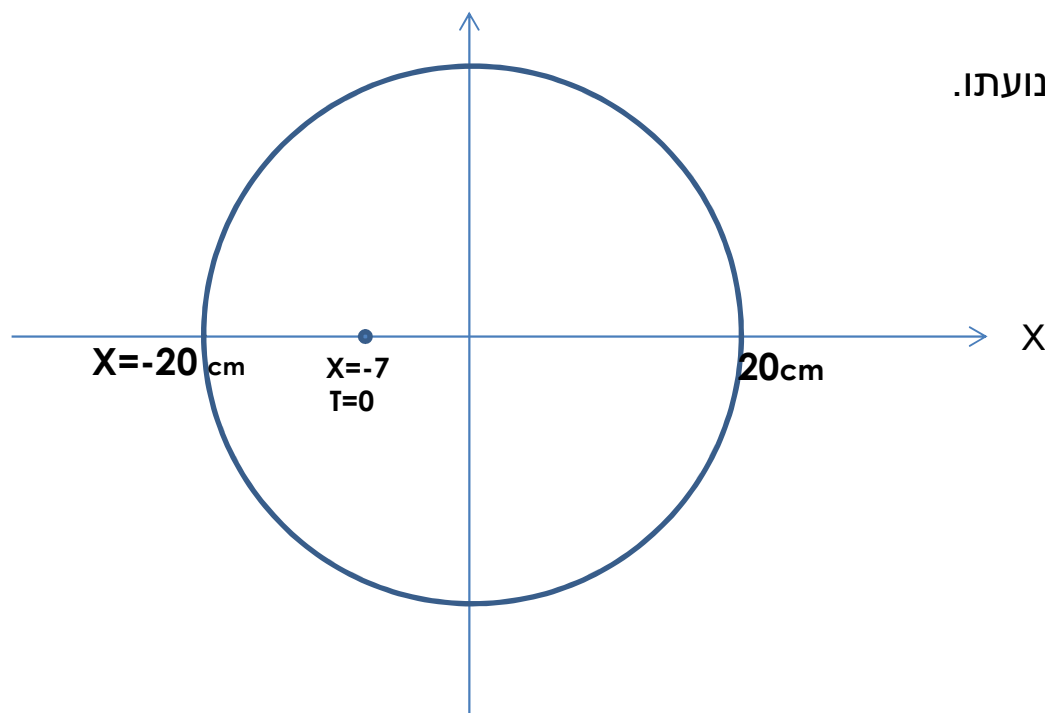
◀ ישנן 8 אפשרויות בסיסיות לתנאי התחלה, והן:



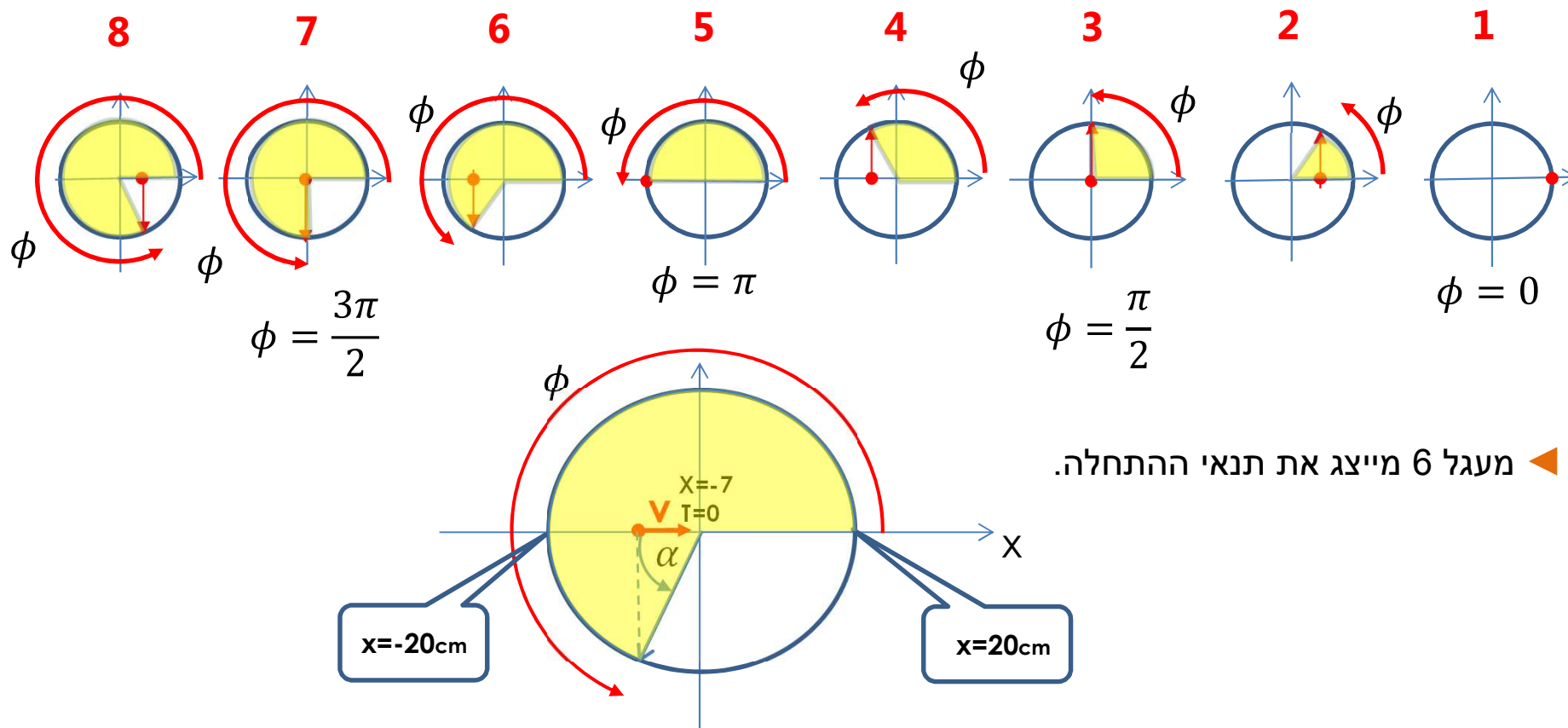
◀ חלקיק נע בת.ה.פ לאורכו של ציר X . אמפליטודת התנועה היא 20 ס"מ.

ברגע $t=0$ הוא נמצא ב: $x=-7(\text{cm})$ ומהירותו היא 10 ס"מ לשנייה בכיוון X החיובי.

חשבו את זווית המופע של תנועתו.



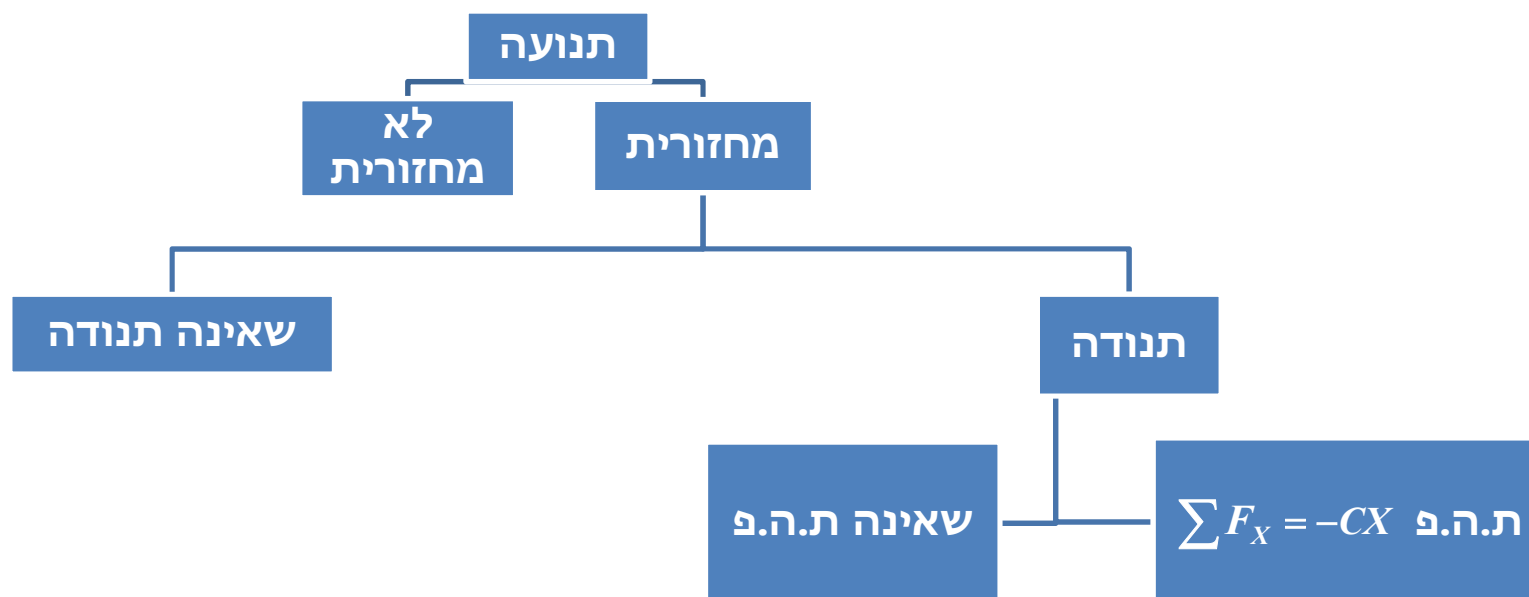
פתרון דוגמא 4



$$\phi = 180 + \alpha; |\cos \alpha| = \frac{7}{20} \Rightarrow |\alpha| = 69.5^\circ$$

$$\phi 249.5^\circ = \frac{249.5}{360} \pi \cong 2.18_{\text{radians}}$$

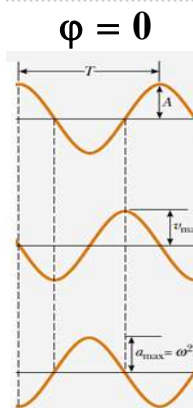
20cm



סיכום השיעור (2)

פונקציות הת.ה.פ. :

– כתלות בזמן :

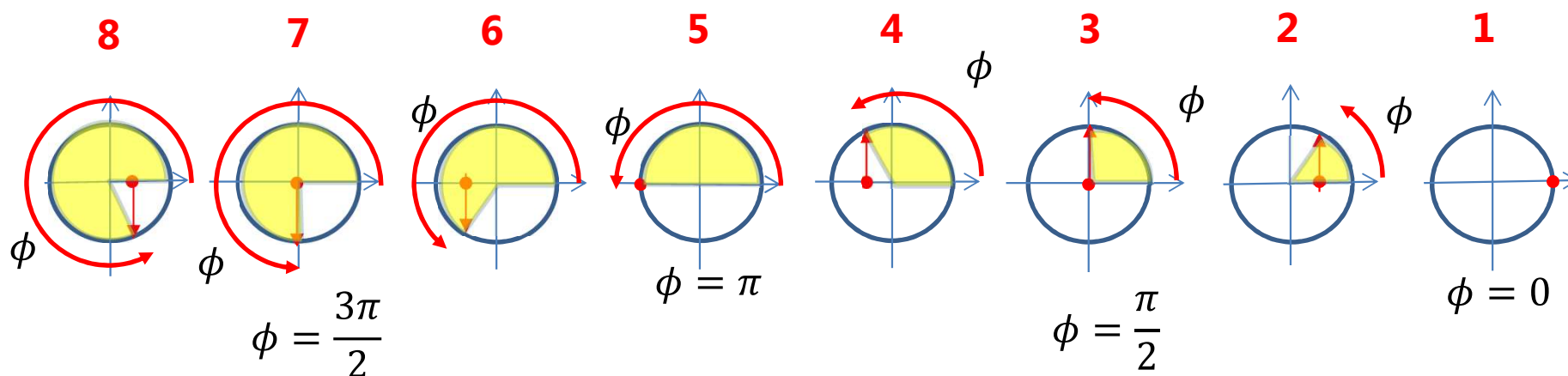


$$(1) \ x(t) = A \cos(\underbrace{\omega t + \phi}_{\theta})$$

$$(2) \ v(t) = -\omega A \sin(\underbrace{\omega t + \phi}_{\theta})$$

$$(3) \ a(t) = -\omega^2 A \cos(\underbrace{\omega t + \phi}_{\theta})$$

– חישוב זווית מופע :



• הפקת גוונים שונים של צלילים.

המהנדס הצרפתי ז'אן-בטיסט ז'וזף פורייה. הצליח להוכיח, בשלהי המאה ה-18, שכל גל, מכל צורה שהיא ניתן לפירוק לגלי משנה בסיסיים הנקראים גלים הרמוניים אשר כל אחד מהם מאופיין על ידי תנודה הרמונית פשוטה.
זוהי **אנליזת פורייה** (Fourier).



ניתן גם "לבנות" כל גל שהוא מאוסף של גלים הרמוניים.
זוהי **סינתזת פורייה**.

תגלית זו אפשרה, למשל, את אפיונם של גווני הצליל השונים של כלי נגינה, כך שניתן היה לפתח מכשיר אלקטרוני המחקק בדיוקנות רבה את גוון הצליל המיוחד של כל כלי נגינה. זהו **הסינטיסייזר**.
שימוש נרחב בהתמרות פורייה נעשה בתחום **עיבוד אותות**: אנלוגי-דיגיטלי-אנלוגי.

משוואה דיפרנציאלית

- משוואה דיפרנציאלית (מד"ר) היא משוואה בה מופיע משתנה +נגזרותיו.
- אם המשתנה הוא משתנה יחיד, זוהי משוואה דיפרנציאלית רגילה.
- אם ישנם מספר משתנים, זוהי משוואה דיפרנציאלית חלקית.

סדר המשוואה הדיפרנציאלית

- סדר המשוואה הדיפרנציאלית נקבע על פי הסדר הגבוה ביותר של הנגזרת
- למשל: $\dot{x} = -cx$ היא מד"ר מסדר ראשון ו- $\ddot{x} = -cx$ היא מד"ר מסדר שני.

האפיון המתמטי של תנועה הרמונית פשוטה

- האפיון המתמטי המדויק של תנועה הרמונית פשוטה הוא: $\ddot{x} = -cx$
- זוהי משוואה דיפרנציאלית מסדר שני.
- פתרון מד"ר זו חייב להיות סינוס או קוסינוס או שילוב של שניהם.
- נציע פתרון: $x = A \cos(\omega t - \phi)$.
- פתרון זה מוצלח שכן אם נגזור פעמיים את x לפי משתנה הזמן t , נקבל:

$$\ddot{x} = -\omega^2 \underbrace{A \cos(\omega t - \phi)}_x = -\omega^2 x = -cx$$

כנדרש.

על פי הזהות הטריגונומטרית : $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

ניתן להציג את פונקציות ה.ת.ה.פ כתלות בזמן גם באופן הבא:

$$(1) x(t) = A \cos(\underbrace{\omega t + \theta}_{\theta}) = A \cos(\omega t) \cos\phi - A \sin(\omega t) \sin\phi$$

$$\begin{aligned} A \cos\phi &= p \\ -A \sin\phi &= q \end{aligned} \quad \text{נסמן:}$$

$$x(t) = p \cos(\omega t) + q \sin(\omega t)$$

$$v(t) = -\omega p \sin(\omega t) + \omega q \cos(\omega t) \quad \text{ואז:}$$

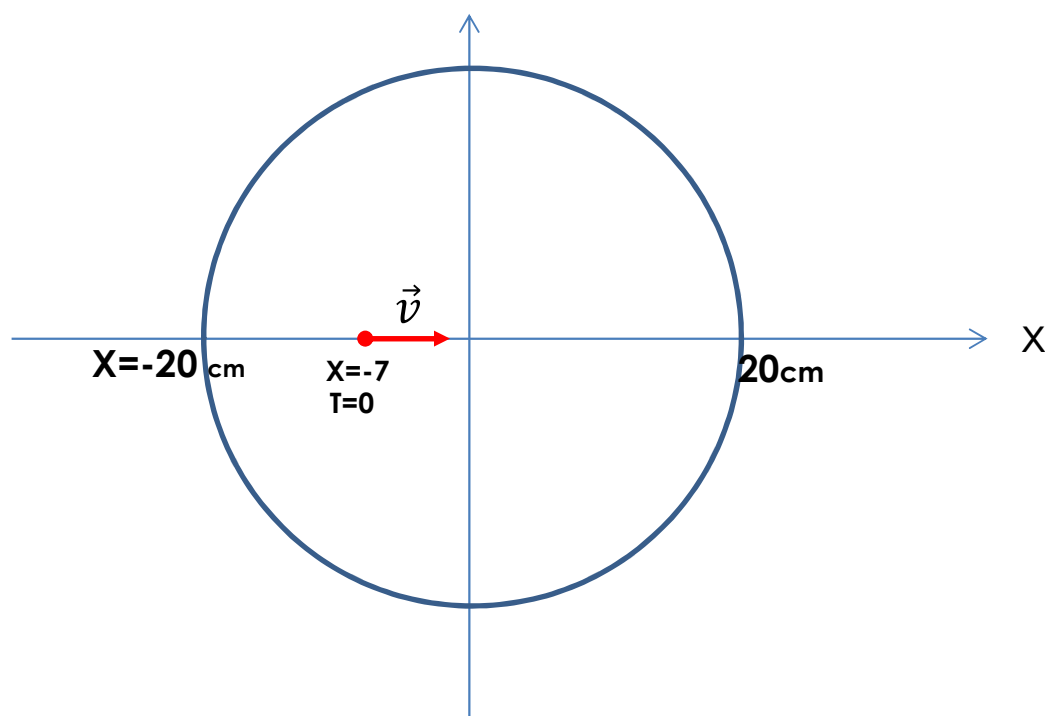
$$a(t) = -\omega^2 p \cos(\omega t) + -\omega^2 q \sin(\omega t)$$

את p ו- q נחשב מתנאי ההתחלה. ואמפליטודת התנועה תהיה : $A = \sqrt{p^2 + q^2}$

בשקופית הבאה נפתור את דוגמא (5) באמצעות שיטה זו.

חלקיק נע בת.ה.פ לאורכו של ציר X . אמפליטודת התנועה היא 20 ס"מ.
ברגע $t=0$ הוא נמצא ב: $x=-7(\text{cm})$ ומהירותו היא 10 ס"מ לשנייה בכיוון X החיובי.

- חשבו את פונקציית המיקום שלו.
- חשבו את זווית המופע.



א. חישוב פונקציית המיקום:

$$(1) \quad x(t) = p \cos(\omega t) + q \sin(\omega t)$$

נוסחת המיקום:

$$\text{נציב ב (1) את תנאי ההתחלה עבור המיקום: } x(t=0) = -7$$

$$-7 = p \cos(0) + q \sin(0) \Rightarrow p = -7 \quad \text{נקבל:}$$

$$A = \sqrt{p^2 + q^2} \quad \text{הנוסחא לאמפליטודה:}$$

$$\Rightarrow 20 = \sqrt{(-7)^2 + q^2} \Rightarrow |q| = 18.73 \quad \text{נציב את תנאי ההתחלה:}$$

$$(2) \quad v(t) = -\omega p \sin(\omega t) + \omega q \cos(\omega t) \quad \text{נוסחת המהירות:}$$

$$10 = -\omega p \sin(0) + \omega q \cos(0) \quad \text{נציב את תנאי ההתחלה עבור המהירות:}$$

$$\Rightarrow 10 = \underbrace{\omega}_{\text{positive}} q \Rightarrow q > 0 \Rightarrow q \approx +18.73, \quad \omega \approx 0.53$$

$$\text{נציב: } p = -7, q = 18.73 \text{ ו- } \omega = 0.53 \text{ במשוואה (1) ונקבל את פונקציית המיקום:}$$

$$(1) \quad x(t)_{cm} = -7 \cos(-0.53 \omega t) + 18.73 \sin(0.53 t)$$

פתרון דוגמא 5- סעיף ב'

ב. חישוב זווית המופע :

$$\phi = 249.5^\circ \left\{ \begin{array}{l} A \cos \phi = p \Rightarrow \cos \phi = \frac{p}{A} = -\frac{7}{20} = -0.35 \\ -A \sin \phi = q \Rightarrow \sin \phi = -\frac{q}{A} = -\frac{18.73}{20} \cong -0.94 \end{array} \right.$$

◀ אם הסינוס שלילי וגם הקוסינוס שלילי, הרי מדובר על הרביע השלישי במעגל הטריגונומטרי.