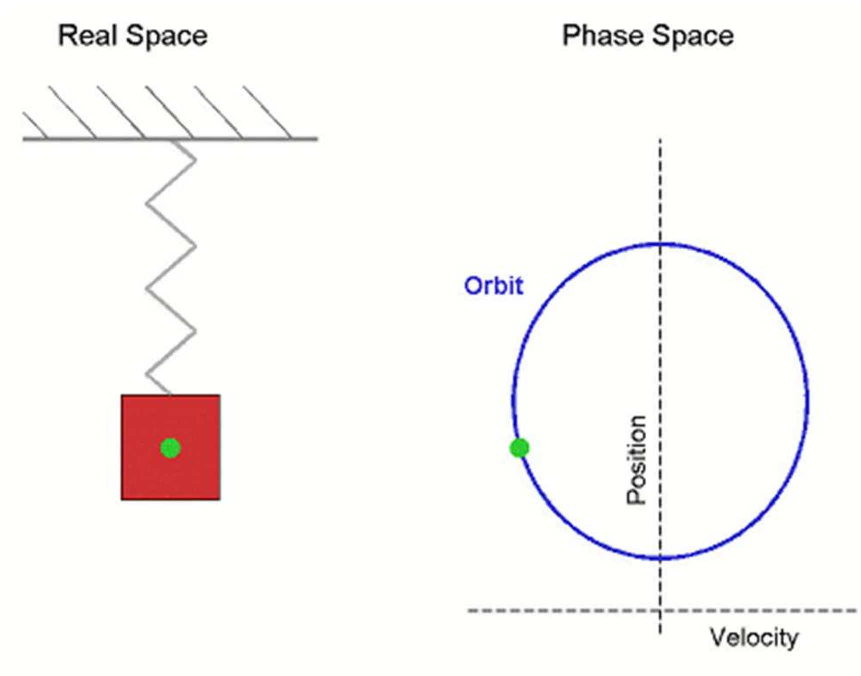
מכניקה

תנועה הרמונית פשוטה

Wikimedia Commons



נושאי השיעור

- זמן מחזור ותדירות בת.ה.פ
- פיתוח פונקציות הת.ה.פ כתלות במיקום
- מאזן אנרגטי בת.ה.פ
- מטוטלת מתמטית
- סיכום ת.ה.פ

זמן מחזור ותדירות בתנועה הרמונית פשוטה

- מאחר ונקודת ההיטל על ציר x , של נקודה המסתובבת במעגל בתנועה קצובה, מבצעת תנועה הרמונית פשוטה-ניתן לחשב בנקל את זמן המחזור והתדירות שלה.
- מתנועה מעגלית:

$$(1) \quad \omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

- בפיתוח הת.ה.פ קיבלנו (ראו חלק א') :

$$(2) \quad x(t) = A\cos\theta$$

$$(3) \quad a(t) = -\omega^2 A\cos\theta$$

- נציב את x של פונקציה (2) בפונקציה (3) ונקבל:

$$(4) \quad a = -\omega^2 \underbrace{A\cos\theta}_{x} = -\omega^2 x$$

- ניזכר באפיון הת.ה.פ:

$$\boxed{(5) \ \sum F_x = -CX}$$

- נרשום את חוק שני של ניוטון תוך הצבת (4) ו-(5) ונקבל :

$$\sum F_x = ma \Rightarrow -Cx = m\underbrace{a}_{-\omega^2 x} = -m\omega^2 x \Rightarrow C = m\omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{C}{m}}$$

- מכאן לפי (1):

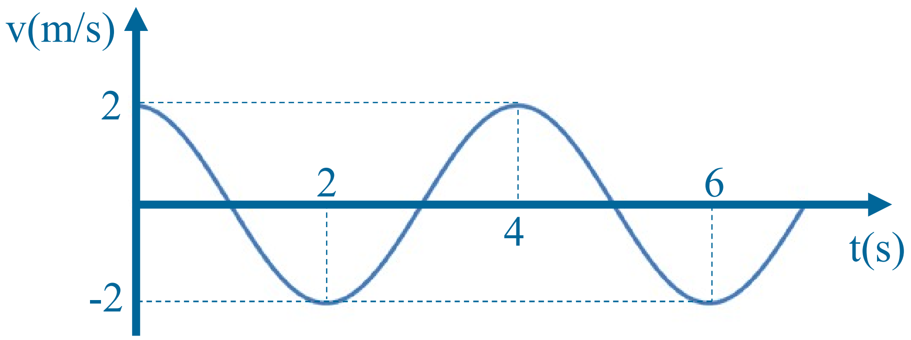
$$\omega = \sqrt{\frac{C}{m}} = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

ולכן:

$$\boxed{f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{C}{m}} \quad ; \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{C}}}$$

דוגמא 1

משקולת שמסתה $m=0.5_{kg}$ מחוברת לקפיץ אופקי שמסתו זניחה. תלמיד משך את המשקולת מרחק A ושחרר אותה ממנוחה. חיישן המחובר למחשב מדד את מהירות המשקולת בזמנים שונים, ועל צג המחשב התקבל הגרף המתואר בתרשים. ברגע $t=0$ המשקולת חולפת על פני נקודת שווי-המשקל בתנועתה ימינה. ציר X מכוון ימינה.



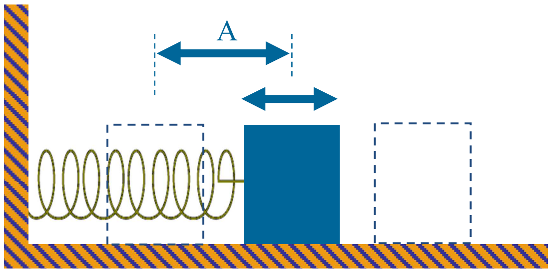
א. מצאו את המשרעת A.

ב. חשבו את קבוע הכוח של הקפיץ K.

ג. מתי בפרק הזמן $0<t<7$:

1. הגוף נימצא בנקודת שווי המשקל ?
2. מתאפסת תאוצת המשקולת ?
3. כיוון הכוח השקול הפועל על המשקולת הוא ימינה ?
4. ההעתק והמהירות הן באותו הכיוון ?
5. התאוצה והמהירות הן באותו הכיוון ?

ד. מהי האנרגיה הכללית במהלך התנועה ?



פתרון דוגמא 1

א. מהגרף ניתן לראות שזמן המחזור T=4sec .

$$\varphi = \frac{3}{2}\pi = 270°$$

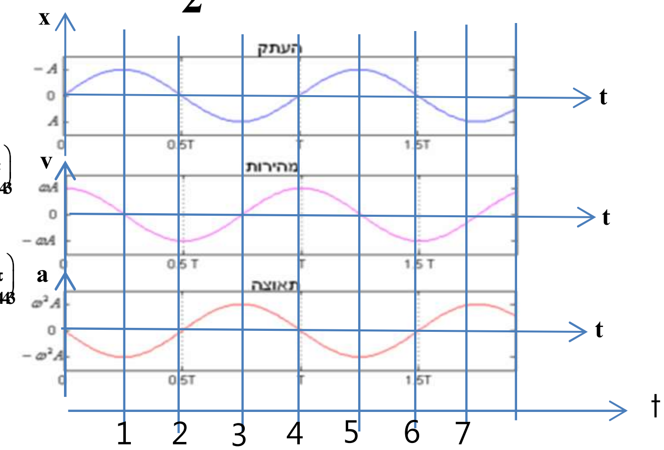
$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{4} = 1.57 \frac{rad}{sec}$$

$$v_{max} = \pm\omega A \Rightarrow A = \frac{v}{\omega} = \frac{2}{T} = \frac{2}{1.57} = 1.273_{m}$$

$$(1)\quad x(t) = A\cos\underbrace{\left(\omega t + \frac{3}{2}\pi\right)}_{\theta}$$

$$(2)\quad v(t) = -\omega A\sin\underbrace{\left(\omega t + \frac{3}{2}\pi\right)}_{\theta}$$

$$(3)\quad a(t) = -\omega^2 A\cos\underbrace{\left(\omega t + \frac{3}{2}\pi\right)}_{\theta}$$



ב. $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \omega^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow k = m\omega^2 = 0.5 \cdot 1.57^2 = 1.232_{\frac{N}{m}}$

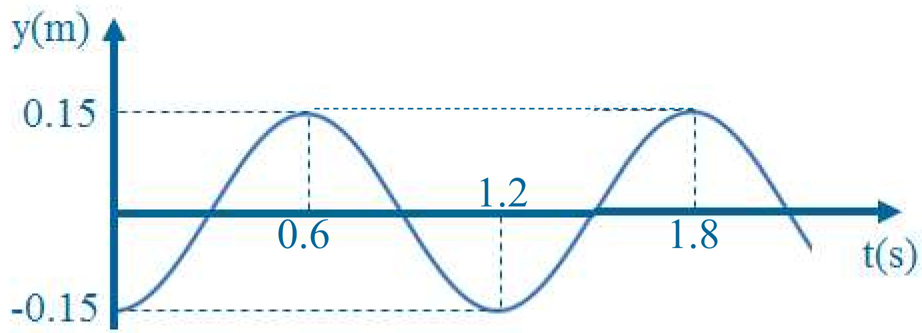
ג. 1. בנקודת שיווי המשקל גודל המהירות מרבי וזה קורה בזמנים: t=2,4,6sec .
2. בנקודת שיווי המשקל התאוצה מתאפסת וזה קורה בזמנים: t=2,4,6sec .
3. הכוח השקול הפועל על המשקולת מכוון ימינה כאשר המשקולת נמצאת משמאל לנקודת שיווי משקל וזה קורה בזמנים: 2sec<t<4sec וגם במרווח: 6sec<t<7sec.
4. ההעתק והמהירות הן באותו הכיוון בזמנים: 0sec<t<1sec, 2sec<t<3sec, 4sec<t<5sec, 6 sec<t<7sec.
5. התאוצה והמהירות הן באותו הכיוון בזמנים: 1sec<t<2sec, 3sec<t<4sec, 5sec<t<6sec.

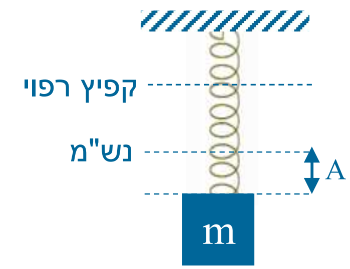
ד. האנרגיה הכללית במהלך התנועה: $E_{k(\max)} = \frac{m \cdot v_{\max}^2}{2} = \frac{0.5 \cdot 2^2}{2} = 1J$

דוגמא 2

משקולת, שמסתה m , תלויה על קפיץ אנכי שמסתו זניחה. תלמיד משך את המשקולת כלפי מטה מרחק A, ושחרר אותה (ממנוחה). חיישן המחובר למחשב מדד את מקום המשקולת בזמנים שונים, ועל צג המחשב התקבל הגרף המתואר בתרשים.

מקום המשקולת, y, נמדד ביחס לציר אנכי שראשיתו בנקודת שיווי-המשקל, וכיוונו החיובי כלפי מעלה.





א. מצאו את המשרעת A.

ב. מצאו את זמן המחזור של התנודות ואת תדירותן.

ג. חשבו את קבוע הכוח של הקפיץ.

ד. מתי בפרק הזמן $0.1<t<1.4$ מתאפסת מהירות המשקולת? הסבירו.

ו. מתי בפרק הזמן $0.1<t<1.4$ מתאפסת תאוצת המשקולת? הסבירו.

ז. מהו הכיוון (כלפי מעלה או כלפי מטה) של **הכוח השקול** הפועל על המשקולת ברגע $t=1s$? הסבירו.

פתרון דוגמא 2

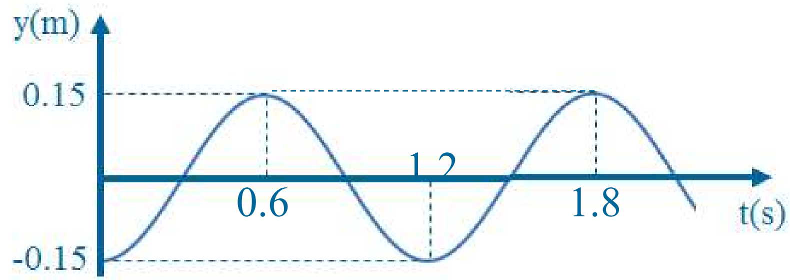
א. מהגרף ניתן לראות שהמשרעת: A=0.15m.

ב. מהגרף ניתן לראות שזמן המחזור T=1.2sec , מכאן שהתדירות:

$$f=\frac{1}{T}=\frac{1}{1.2}=0.833Hz$$

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{1.2}=5.235\,\frac{rad}{\sec}$$

ג.



$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}\Rightarrow\omega^2=\frac{k}{m}\Rightarrow k=m\omega^2=1\cdot5.235^2=27.41\frac{N}{m}$$

ד. מהירות המשקולת מתאפסת כאשר המשקולת בקצה המשרעת בזמנים: t=0.6,1.2sec .

ה. תאוצת המשקולת מתאפסת כאשר המשקולת בנקודת הנש"מ בזמנים: t=0.3,0.9sec .

ו. כיוון הכוח השקול הפועל על המשקולת ברגע t =1s הוא כלפי מעלה. בזמן זה ההעתק הוא שלילי וכיוון הכוח השקול בתנועה הרמונית מנוגד לכיוון ההעתק.

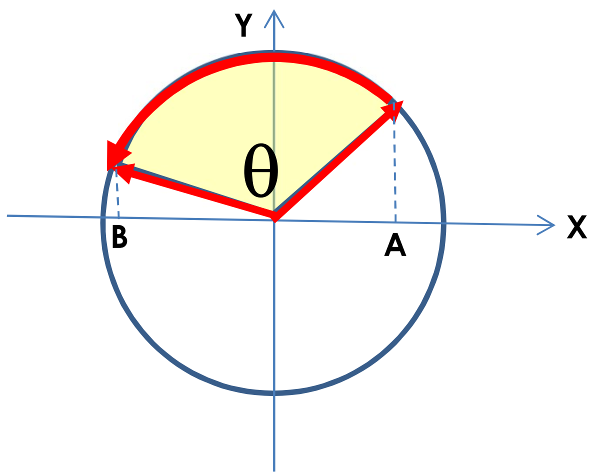
חישוב זמן מעבר מנקודה לנקודה

- חישוב זמן מעבר מנקודה A לנקודה B לאורך ציר התנודה ההרמונית מתאפשר בשתי דרכים:

- **דרך א'-** על פי פונקציות הת.ה.פ: נציב את הקואורדינטות X_A ו - X_B . בדרך זו נקבל משוואה טריגונומטרית בעלת אינסוף פתרונות. מתוך אותם פתרונות נבחר את הפתרון הרלוונטי.

  דרך זו מסורבלת ולכן נוותר עליה.

- **דרך ב'-** ננצל את המעגל ההרמוני, עליו ניתן תמיד לתאר את תנועתה הקצובה של הנקודה המלווה את הת.ה.פ על גבי המעגל. דרך זו נוחה ופשוטה ולכן נתמקד בה.



נסרטט את המעגל ההרמוני המלווה את התנועה ההרמונית:

מאחר והמהירות הזויתית של הת.ה.פ קבועה-נוכל לרשום:

$$\theta = \omega t$$

$$2\pi = \omega T$$

ולכן:

$$\boxed{\frac{t}{T} = \frac{\theta_{rad}}{2\pi_{rad}} = \frac{\theta^{\circ}}{360^{\circ}}}$$

פרופורציה זו מאפשרת חישוב קל ומהיר של זמן המעבר מנקודה לנקודה.

נמחיש זאת באמצעות דוגמא 8.

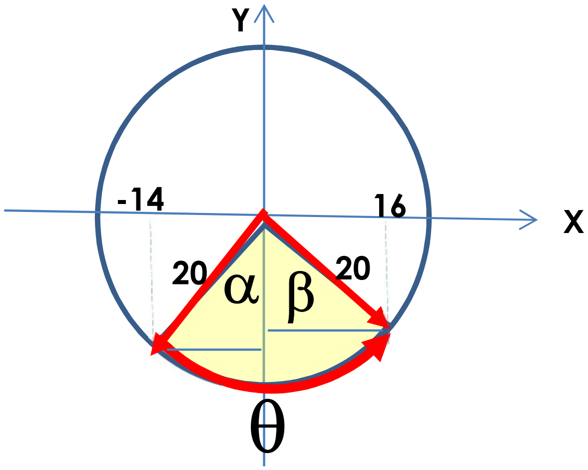
דוגמא 3

- חלקיק נע בתנועה הרמונית פשוטה. אמפליטודת התנועה היא 20 ס"מ וזמן המחזור של תנועתו הוא 6 שניות. החלקיק נמצא בקואורדינטה $x=-14$ ס"מ ונע בכיוון החיובי של ציר x.

  חשבו את הזמן הקצר ביותר שיחלוף עד אשר החלקיק ימצא בקואורדינטה $x=16$ ס"מ.

פתרון דוגמא 3

◄ נסרטט את המעגל ההרמוני הרלוונטי:



$$\frac{t}{T}=\frac{\theta^{\circ}}{360^{\circ}}$$

את הזויות נחשב על פי:

$$\sin|\alpha|=\frac{14}{20}\Rightarrow\alpha\approx 44.4^{\circ}$$

$$\sin\beta=\frac{16}{20}\Rightarrow\beta\approx 53^{\circ}$$

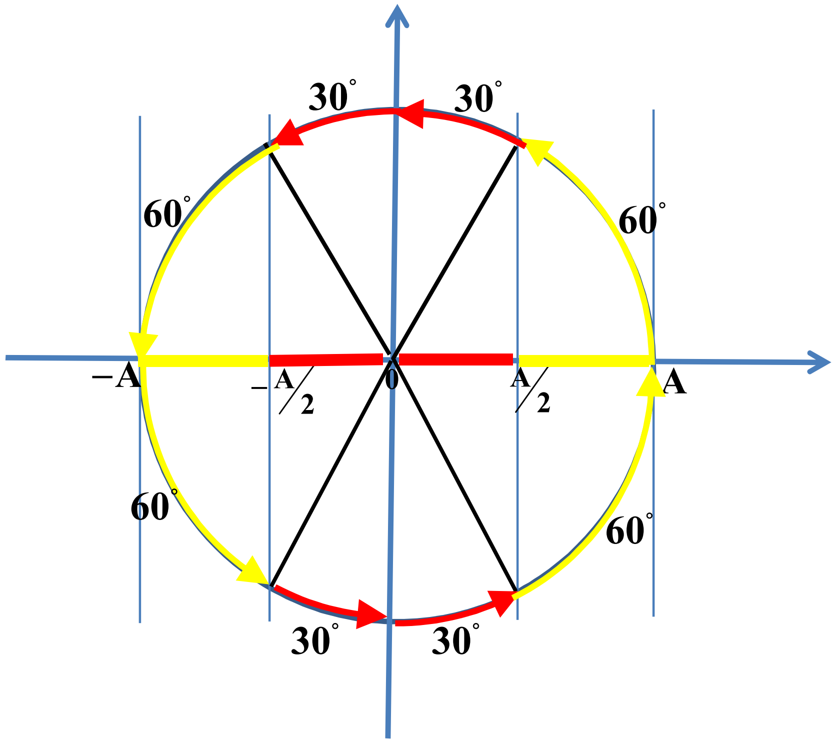
$$\theta=\alpha+\beta=97.4^{\circ}$$

$$t=\frac{97.4^{\circ}}{360^{\circ}}\cdot 6\approx 1.62_{sec}$$

חלוקת זמנים בת.ה.פ

- באמצעות המעגל ההרמוני קל לחלק את זמן המחזור למקטעים:

- חלוקת הזמנים פרופורציונית לגדלי הזויות המרכזיות:



כל מעבר "צהוב" מלווה בזוית מרכזית בת 60° , כלומר זמן המהווה 1/6 זמן מחזור.

כל מעבר "אדום" מלווה בזוית מרכזית בת 30° , כלומר זמן המהווה 1/12 זמן מחזור.

פיתוח פונקציות הת.ה.פ כתלות במיקום

- לעתים נידרש לחשב את מהירותו או תאוצתו של חלקיק הנע בתה.ה.פ כתלות במיקומו ולאו דווקא כתלות בזמן.

ניזכר בפונקציות הת.ה.פ כתלות בזמן:

$$(1)\quad x(t) = A\cos\theta$$

$$(2)\quad v(t) = -A\omega\sin\theta$$

$$(3)\quad a(t) = -A\omega^2\cos\theta$$

א. פיתוח פונקציית המהירות כתלות במיקום החלקיק:

$$(1)\quad x = A\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{x}{A}$$

אבל:

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \qquad \Rightarrow \sin\theta = \pm\sqrt{1-\cos^2\theta} = \pm\sqrt{1-\frac{x^2}{A^2}}$$

נציב בפונקציה (2):

$$(2)\quad v(x) = -A\omega\sin\theta = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2}$$

ב. פיתוח פונקציית התאוצה כתלות במיקום החלקיק:

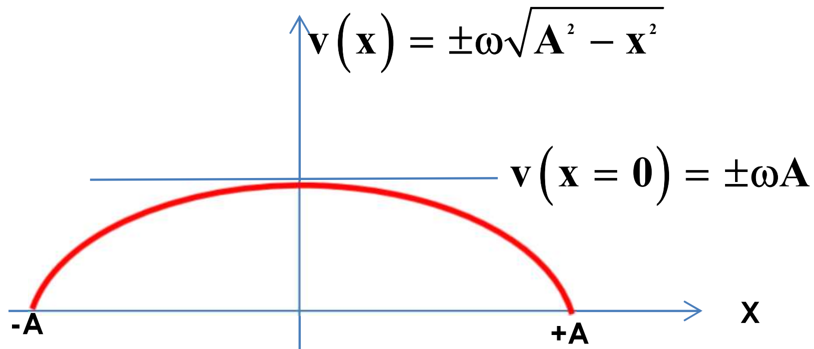
$$(3)\quad a(x) = -\omega^2 \underbrace{A\cos\theta}_{x} = -\omega^2 x$$

נסכם את המימצאים בשיקופית הבאה:

פונקציות הת.ה.פ כתלות במיקום

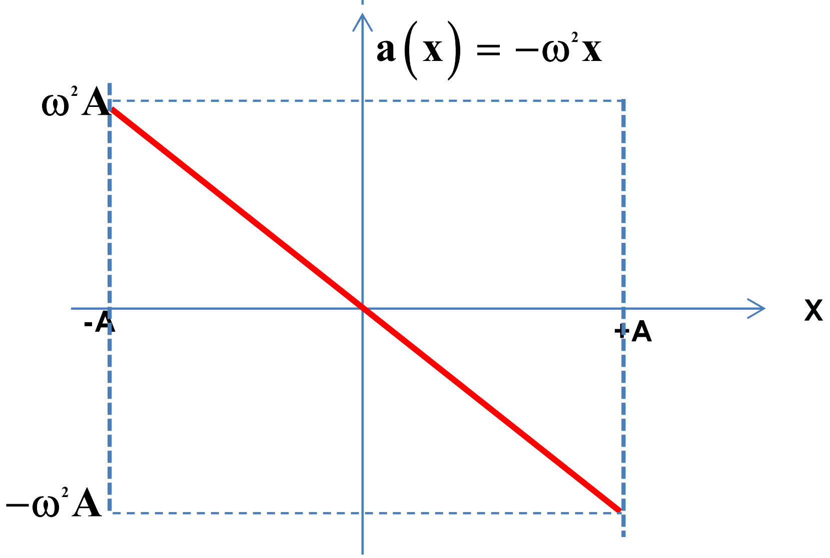
◄ סיכום הממצאים:

א. פונקצית המהירות כתלות במיקום החלקיק:



$$v(x) = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2}$$

ב. פונקצית התאוצה כתלות במיקום החלקיק:



$$a(x) = -\omega^2 x$$

מאזן אנרגטי בת.ה.פ

- בתנועה הרמונית פשוטה, נע חלקיק בהשפעת כוח שקול המאופיין ע"י :

$$\boxed{\sum F_X = -CX}$$

- כוח זה דומה לכוח קפיצי $\sum F_X = -kX$ שהוא כידוע כוח משמר.
- לכל כוח משמר ניתן "להצמיד" אנרגיה פוטנציאלית. האנרגיה הפוטנציאלית של כוח קפיצי נקראת, כזכור, אנרגיה אלסטית והיא נתונה על פי :

$$U_e = \frac{1}{2}kx^2$$

כאשר x נמדד מקצה הקפיץ כשהוא רפוי.

- באופן אנלוגי נוכל "להצמיד" , לכל כוח הרמוני, אנרגיה פוטנציאלית, שתאופיין ע"י הביטוי :

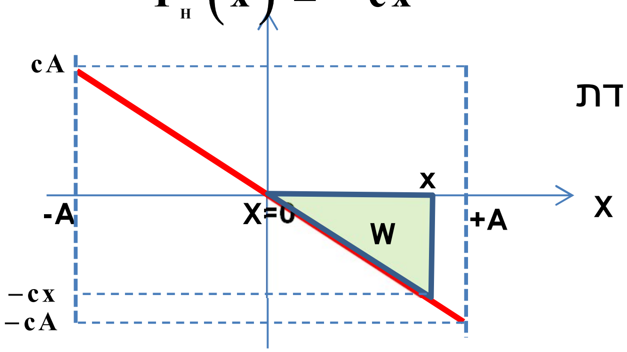
$$\boxed{U_H = \frac{1}{2}cx^2}$$

כאשר המיקום x, נמדד מנקודת שיווי המשקל של הת.ה.פ.

- חישוב מפורש:

האנרגיה הפוטנציאלית ההרמונית בנקודת היעד מוגדרת **כמינוס** עבודת הכוח ההרמוני. כאשר החלקיק מוזז מנקודת היחוס אל נקודת היעד, נקודת היחוס מוגדרת כאן כ x=0. כלומר :

$$F_H(x) = -cx$$



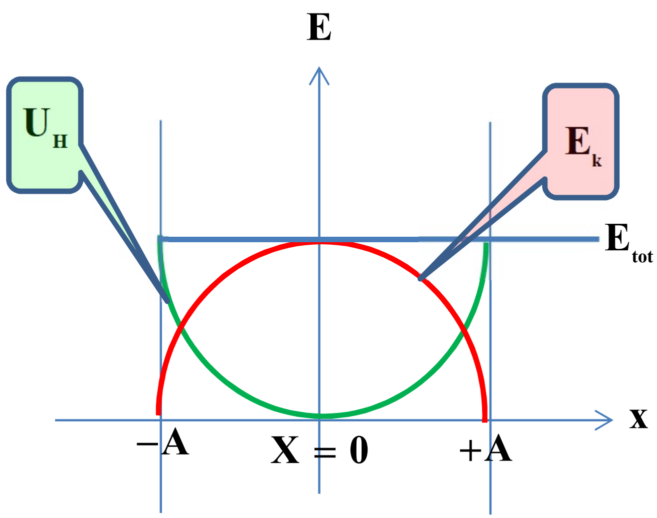
$$U_H \equiv -W(F_H)_{0-x} = -\int_{x'=0}^{x} -cx'dx = \frac{1}{2}cx^2$$

או על פי מינוס "השטח הירוק"

$$U_H \equiv -W(F_H)_{0-x} = -\frac{\left[-cx \cdot x\right]}{2} = \frac{1}{2}cx^2$$

מאזן אנרגטי בת.ה.פ

- נסרטט גרף המשלב אנרגיה פוטנציאלית הרמונית ואנרגיה קינטית:



- הגרף מייצג את מעברי האנרגיה מקינטית לפוטנציאלית הרמונית ולהיפך.
- האנרגיה הכוללת נשמרת.
- בקצה האמפליטודה האנרגיה הקינטית מתאפסת ואילו האנרגיה ההרמונית מקסימאלית ושווה ל - $\frac{1}{2}CA^2$.
- בנקודת שיווי המשקל האנרגיה הפוטנציאלית ההרמונית מתאפסת ואיליו האנרגיה הקינטית מקסימאלית ושווה ל- $\frac{1}{2}mv_{max}^2 = \frac{1}{2}m(\omega A)^2$

מאזן אנרגטי בת.ה.פ

◄ באמצעות שימור אנרגיה קינטית/פוטנציאלית הרמונית, נוכל לפתח באופן אלטרנטיבי, את נוסחת המהירות כתלות במיקום החלקיק:

$$U_H\left(x = A\right) = U_H\left(x\right) + E_K\left(x\right)$$

$$\frac{1}{2}CA^2 = \frac{1}{2}Cx^2 + \frac{1}{2}mv_x{}^2$$

$$C\left(A^2 - x^2\right) = mv_x{}^2$$

אבל: $C = m\omega^2$

$$Q \quad m\omega^2\left(A^2 - x^2\right) = mv_x{}^2$$

$$Q \quad \boxed{v\left(x\right) = \pm\sqrt{A^2 - x^2}}$$

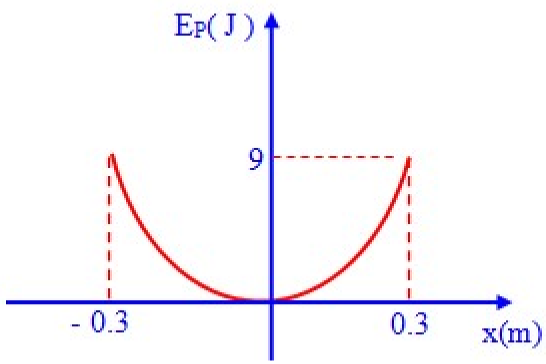
וזו הרי תוצאה שכבר פיתחנו באמצעים קינמטיים.

דוגמא 4

על משטח אופקי חסר חיכוך מונח גוף שמסתו $m= 2(Kg)$ המחובר לקפיץ.

מותחים את המערכת קפיץ – מסה למרחק X ממצב שיווי המשקל ומשחררים אותה לאחר מכן.

הגרף שלפניכם מתאר את האנרגיה הפוטנציאלית של הקפיץ כפונקציה של העתקו ממצב שיווי המשקל.



א. חשבו את קבוע הכוח של הקפיץ.

ב. מה גודל מהירות המסה :

1) בחלפה דרך נקודת שיווי המשקל?

2) כשהקפיץ מכווץ ב- 0.1m?

ג. שרטטו גרף של הכוח המחזיר שהקפיץ מפעיל על m כפונקציה של ההעתק ממצב שיווי המשקל.

ד. מהו הגודל הפיזיקלי שמבטא השטח הכלוא בין הגרף ששרטטתם לבין ציר ה- X בקטע שבין $X=0.3(m)$ ל- $X=-0.3(m)$?

ה. בכמה מתוח (או מכווץ) הקפיץ, כאשר האנרגיה הפוטנציאלית האלסטית שלו שווה לאנרגיה הקינטית שלו?

ו. העתיקו את הגרף הנתון בשאלה, והוסיפו לו גרפים של האנרגיה הקינטית ושל האנרגיה הכוללת כפונקציה של ההעתק ממצב שווי המשקל.

פתרון דוגמא 4

א.

$$U_H = \frac{k \cdot A^2}{2} \Rightarrow 9 = \frac{k \cdot 0.3^2}{2} \Rightarrow k = 200\frac{N}{m}$$

ב. 1.גודל מהירות המסה בחלפה דרך נקודת שיווי המשקל:

$$E_{k(\max)} = \frac{m \cdot v_{\max}^2}{2} \Rightarrow 9 = \frac{2 \cdot v_{\max}^2}{2} \Rightarrow v_{\max} = 3\frac{m}{\sec}$$

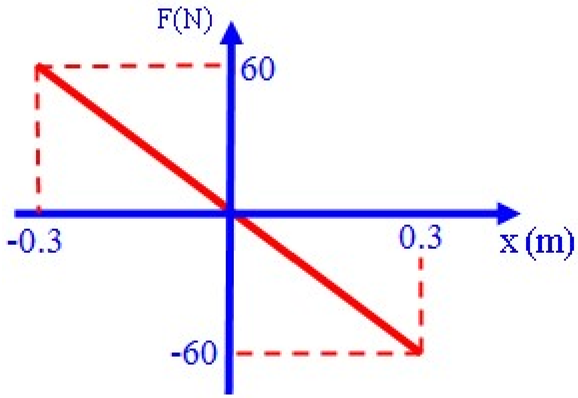
2. גודל מהירות המסה כשהקפיץ מכווץ ב- 0.1m:

$$\frac{k \cdot A^2}{2} = \frac{k \cdot x^2}{2} + \frac{mv^2}{2}$$

$$\frac{200 \cdot 0.3^2}{2} = \frac{200 \cdot 0.1^2}{2} + \frac{2v^2}{2} \Rightarrow v = \sqrt{8} = 2.82\frac{m}{\sec}$$

ג.

$$F_{(\max)} = k \cdot A = 200 \cdot 0.3 = 60N$$



פתרון דוגמא 4-המשך

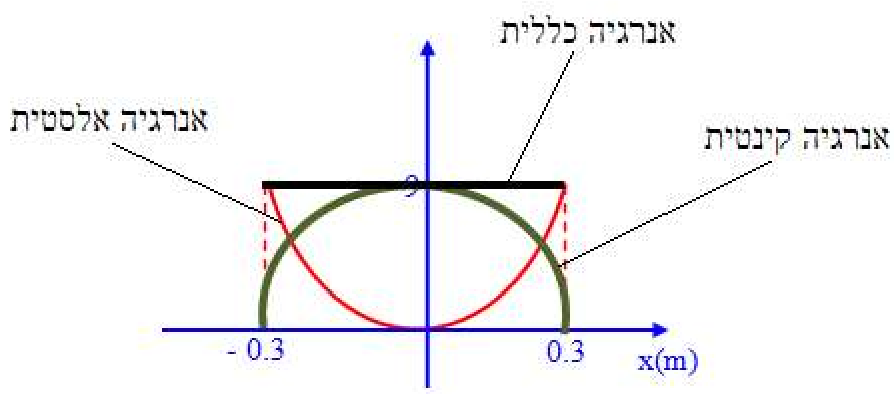
ד. הגודל הפיזיקלי שמבטא השטח הכלוא בין הגרף ששרטטתם לבין ציר ה- X בקטע שבין X=0.3(m) ל- X=-0.3(m) הוא עבודת הכוח ההרמוני שבמקרה זה הוא גם הכוח האלסטי של הקפיץ.
עבודה זו היא אפס.

ה.

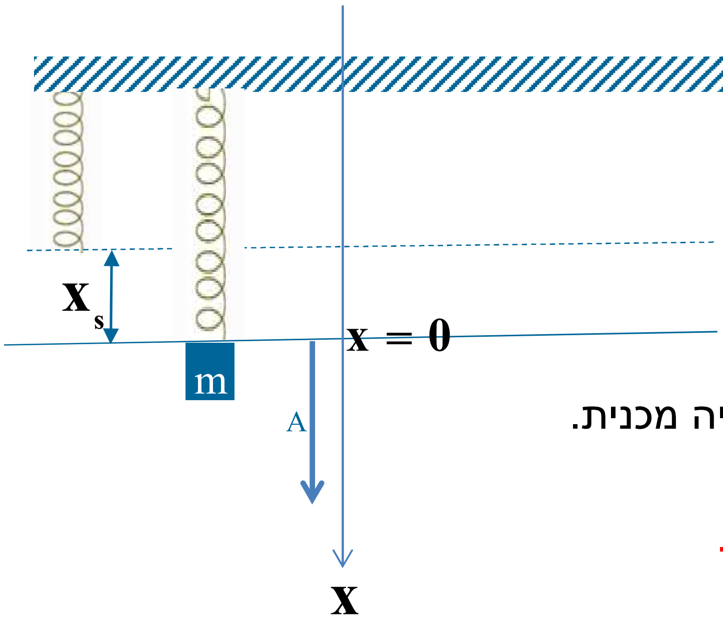
$$\frac{k\cdot A^2}{2}=\frac{k\cdot x^2}{2}+\frac{mv^2}{2}=2\cdot\frac{k\cdot x^2}{2}$$

$$\frac{200\cdot 0.3^2}{2}=2\cdot\frac{200\cdot x^2}{2}\Rightarrow x=0.212m$$

ו.



דוגמא 5



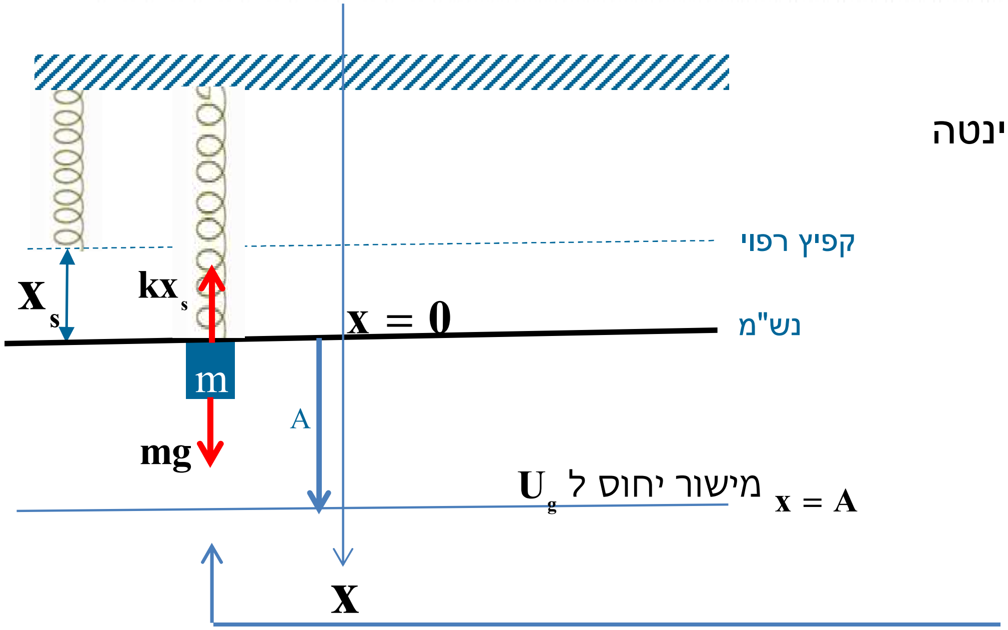
קפיץ בעל מסה זניחה קשור לתקרה בקצהו האחד (ראו איור).
כאשר תולים עליו מסה m, כך שהיא נמצאת בשיווי משקל,
הוא מתארך בשעור x_s . (התארכות זו מכונה-התארכות סטטית).
נקבע את ראשיתו של ציר x בנקודת שיווי המשקל.
נגדיר את כיוונו החיובי של ציר x כלפי מטה.
נמשוך את המסה בשעור A כלפי מטה ונשחרר
אותה לתנועה ספונטאנית.
מאחר ועל m פועלים כוחות משמרים בלבד- חל עליה שימור אנרגיה מכנית.

א. רשמו את משוואת שימור האנרגיה המכנית על m
מרגע שחרורה ועד שהיא מגיעה לקואורדינטה x כללית כלשהי.

ב. הראו שניתן להמיר את סך האנרגיה הפוטנציאלית הכובדית+האנרגיה הפוטנציאלית האלסטית-
באנרגיה ההרמונית $U_H = \frac{1}{2}Cx^2$ בתנאי ש x נמדד מנקודת שיווי המשקל.

כלומר ניתן לוותר רישום האנרגיות הפוטנציאליות-כבדית וקפיצית, בתנאי שממירים אותן באנרגיה הפוטנציאלית ההרמונית.

פתרון דוגמא 5



◄ פתרון סעיפים א'+ ב' :

שימור אנרגיה מהנקודה x=A. ועד לקואורדינטה x כללית :

$$(1)\quad U_e(x=A) = E_K(x) + U_e(x) + U_g(x)$$

$$(2)\quad \frac{1}{2}k(x_s + A)^2 = E_K(x) + mg(A-x) + \frac{1}{2}k(x_s + x)^2$$

$$(3)\quad \frac{1}{2}k(x_s + A)^2 - \frac{1}{2}k(x_s + x)^2 = E_K(x) + mg(A-x)$$

$$(4)\quad \frac{1}{2}k\left[(x_s + A)^2 - (x_s + x)^2\right] = E_K(x) + mg(A-x)$$

$$(5)\quad \frac{1}{2}k\left[(A-x)(2x_s + x + A)\right] = E_K(x) + mg(A-x)$$

$$(6)\quad \frac{1}{2}k\left[(A-x)(2x_s + x + A)\right] - mg(A-x) = E_K(x)$$

$(7)\quad mg = kx_s$ **: בנ.ש.מ**

$$(8)\quad \frac{1}{2}k\left[(A-x)(2x_s + x + A)\right] - kx_s(A-x) = E_K(x)$$

$$(9)\quad \left[(A-x)\left(kx_s + \frac{1}{2}kx + \frac{1}{2}kA\right)\right] - kx_s(A-x) = E_K(x)$$

$$(10)\quad \left[(A-x)\left(kx_s + \frac{1}{2}kx + \frac{1}{2}kA - kx_s\right)\right] = E_K(x)$$

$$(11)\quad \left[(A-x)\left(\frac{1}{2}kx + \frac{1}{2}kA\right)\right] = E_K(x)$$

$$(12)\quad \frac{1}{2}k(A-x)(A+x) = E_K(x)$$

$$(13)\quad \frac{1}{2}kA^2 = E_k(x) + \frac{1}{2}kx^2$$

$$(14)\quad U_{H\,initial} = E_k(x) + U_{H\,final}$$

נדגיש את משוואה 13

$$(14)\quad U_{H\,initial} = E_k(x) + U_{H\,final}$$

המשמעות: ניתן לרשום שימור אנרגיה הרמונית/קינטית כאשר x נמדד מנקודת שיווי המשקל. תוצאה זו צפויה מאחר ובכל נקודה, כח הכובד מתקזז עם הכח הקפיצי כפי שהיה בנקודת שיווי המשקל, על פי משוואה (6). הסבר נוסף-בשקופית הבאה.

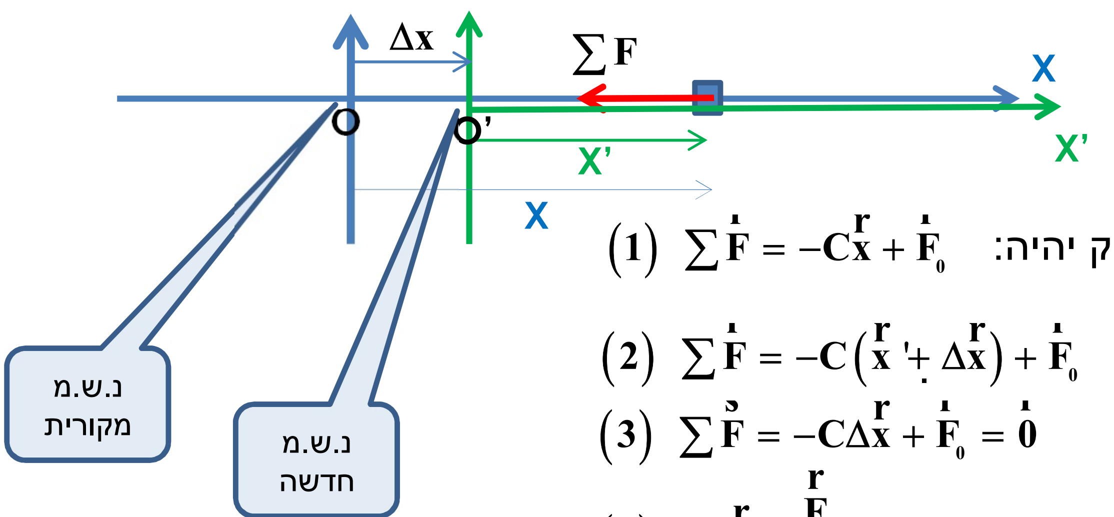
שילוב של כח הרמוני עם כח קבוע-הזזת נ.ש.מ

- כשחלקיק נע בתנועה הרמונית פשוטה, פועל עליו כח הרמוני לפי: $\vec{F}_H = -c\vec{x}$. $\vec{x}$ נמדד מנקודת שיווי המשקל.

בשלב מסויים-מתחיל לפעול על החלקיק כח נוסף-קבוע $\vec{F}_0$

נוכיח שהגוף ימשיך להתנודד בת.ה.פ, אך נקודת שיווי המשקל תוזז ב: $\Delta\vec{x}$[נ.ש.מ] $= \frac{\vec{F}_0}{C}$.

<u>הוכחה</u>



- שקול הכוחות החדש שיפעל על החלקיק יהיה: $(1)\ \sum\vec{F} = -C\vec{x} + \vec{F}_0$
- נסמן $\vec{x} = \vec{x}' + \Delta\vec{x}$
- נציב בפונקציה (1): $(2)\ \sum\vec{F} = -C(\vec{x}' + \Delta\vec{x}) + \vec{F}_0$
- בנ.ש.מ החדשה (o'), X'=0 . ולכן: $(3)\ \sum\vec{F} = -C\Delta\vec{x} + \vec{F}_0 = \vec{0}$

$$(4)\ \therefore\ \Delta\vec{x} = \frac{\vec{F}_0}{c}$$

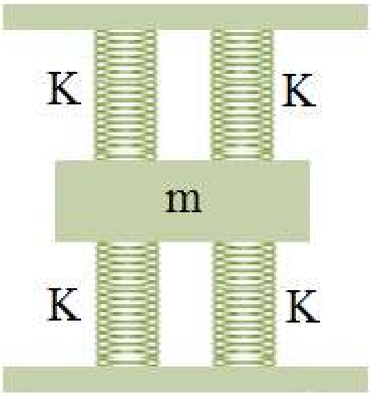
- נציב בפונקציה (1) ונקבל: $(5)\ \sum\vec{F}(x') = -C\left(\vec{x}' + \frac{\vec{F}_0}{C}\right) + \vec{F}_0 = -C\vec{x}'$ ת.ש.מ

- כלומר, החלקיק ימשיך לנוע בת.ה.פ אך נקודת שיווי המשקל **<u>תוזז לכיוון הכח הקבוע $\vec{F}_0$</u>** שהתווסף.

שעור ההזזה: $\Delta\vec{x}$[נ.ש.מ] $= \frac{\vec{F}_0}{C}$

דוגמא 6

גוף שמסתו $m=6\ kg$ מחובר בחלקו העליון לשני קפיצים המחוברים לתקרה, ובחלקו התחתון הוא מחובר לשני קפיצים המחוברים לרצפה. ארבעת הקפיצים זהים, וקבוע הכוח של כל אחד מהם הוא $K=40\ N/m$.



משחררים את הגוף ממנוחה כאשר כל הקפיצים רפויים:

א- מהו C, קבוע הת.ה.פ ?

ב- מהו זמן המחזור של התנודות?

ג- מהי משרעת (אמפליטודת) התנודות?

ד- מהי האנרגיה הקינטית המקסימאלית של הגוף במהלך התנודות?

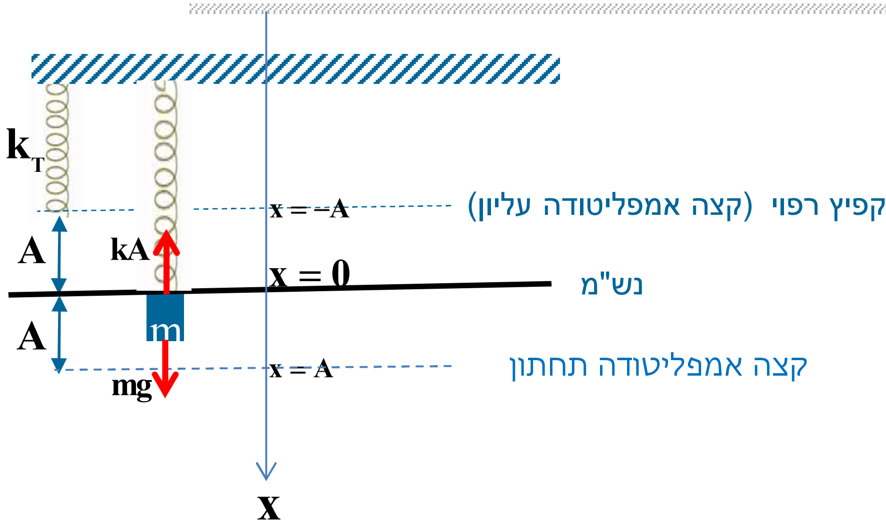
ה- מהי האנרגיה האלסטית המקסימאלית במהלך התנודות?

ו- מהי האנרגיה ההרמונית המקסימאלית במהלך התנודות?

ז- במהלך התנודות כאשר כל הקפיצים רפויים, ניתקים שני הקפיצים התחתונים.

1. מה יהיו המשרעת וזמן המחזור החדשים?
2. האם המהירות המרבית תגדל, תקטן או לא תשתנה? נמקו!

פתרון דוגמא 6



א. $K_{equivalent} = K_T = K\,P\,K\,P\,K\,P\,K = 4K$

לכן נוכל להמיר את ארבעת הקפיצים בקפיץ שקול שקבועו:

$$K_{equivalent} = K_T = 4K = 160\ \frac{N}{m}$$

ב. $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_T}} = 2\pi\sqrt{\frac{6}{160}} = 1.216_{sec}$

ג. חישוב אמפליטודת התנועה:

$$\sum F_x = 0$$

$$mg - k_T A = 0$$

$$A = \frac{mg}{k_T} = \frac{6\cdot 10}{160} = 0.375m$$

במצב בו הקפיצים רפויים המסה נמצאת במנוחה, לכן המיקום בו הקפיצים רפויים הוא קצה האפליטודה.

ד.

$$E_{k(max)} = \frac{m\cdot v_{max}^2}{2} = \frac{m\cdot(\omega A)^2}{2} = \frac{m\cdot\left(\sqrt{\frac{k_T}{m}}\cdot A\right)^2}{2} = \frac{\left(\sqrt{k_T}\cdot A\right)^2}{2} = \frac{\left(\sqrt{160}\cdot 0.375\right)^2}{2} = 11.25\,J$$

פתרון דוגמא 6- המשך

- ה. האנרגיה האלסטית המקסימלית נמדדת במקום בו הקפיץ (השקול) נמצא בהתארכות מקסימלית ממצבו הרפוי. מקום זה הוא קצה האמפליטודה התחתון. במקום זה התארכות הקפיץ היא 2A.

$$U_{e(max)} = \frac{k_T \cdot (2A)^2}{2} = \frac{160 \cdot 0.75^2}{2} = 45\,J$$

בדיקה:

נערוך מאזן אנרגטי, כלומר שימור אנרגיה מכנית מקצה האמפליטודה התחתון ועד נקודת שיווי המשקל.

נוודא שהתוצאות שקיבלנו מהימנות . את מישור היחוס לאנרגיה פוטנציאלית כבדית נבחר בקצה האמפליטודה התחתון:

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{U_e(x=A)}_{\frac{1}{2}K_T(2A)^2}}_{\frac{1}{2}\cdot 160\cdot(2\cdot 0.375)^2}}_{45\,J} = \underbrace{\underbrace{\underbrace{U_e(x=0)}_{\frac{1}{2}K_T(A)^2}}_{\frac{1}{2}\cdot 160(0.375)^2}}_{11.25\,J} + \underbrace{\underbrace{\underbrace{E_K(x=0)}_{\frac{1}{2}mv_{max}^2}}_{\frac{1}{2}m(\omega A)^2}}_{11.25\,J} + \underbrace{\underbrace{\underbrace{U_g(x=0)}_{mgA}}_{6\cdot 10\cdot 0.375}}_{22.5\,J}$$

וניתן לראות שאכן מתקיים שימור אנרגיה מכנית כי:

$$45 = 11.25 + 11.25 + 22.5$$

פתרון דוגמא 6 -המשך

◄ ו. האנרגיה ההרמונית המקסימלית במהלך התנודות, נמדדת בקצה האמפליטודה והיא :

$$U_{H,max} = \frac{1}{2}cA^2 = \frac{1}{2}K_T A^2 = \frac{160 \cdot 0.375^2}{2} = 11.25\,J$$

בדיקה:

נערוך מאזן אנרגטי, כלומר שימור אנרגיה מכנית מקצה האמפליטודה התחתון ועד נקודת שיווי המשקל.

נוודא שהתוצאות שקיבלנו מהימנות:

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{U_H(x=A)}_{\frac{1}{2}cA^2}}_{\frac{1}{2}\cdot 160\cdot 0.375^2}}_{11.25\,J} = \underbrace{U_H(x=0)}_{0} + \underbrace{E_K(x=0)}_{11.25\,J}$$

ואכן, המשוואה מאוזנת.

◄ ז.

– 1.

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow mg - 2kA' = 0$$

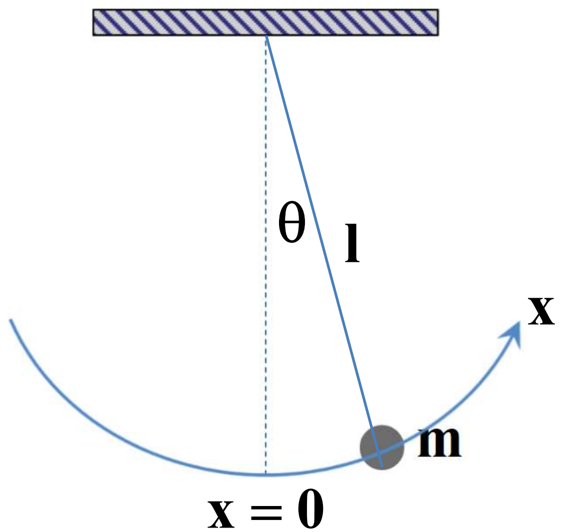
$$A' = \frac{mg}{2k} = \frac{6 \cdot 10}{2 \cdot 40} = 0.75m$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_T}} = 2\pi\sqrt{\frac{6}{2 \cdot 40}} = 1.72\sec$$

– 2. המשרעת גדלה והמסה קבועה, לכן המהירות המרבית גדלה.

מטוטלת מתימטית

- חוט אשר מסתו זניחה, קשור אל התקרה בקצהו האחד. אל קצהו השני מחובר גוף קטן שמסתו m.
  מערך זה נקרא מטוטלת.
- אם נסיט את המטוטלת ממצבה האנכי ונשחרר אותה לתנודה ספונטאנית-יתנודד הגוף בתנודה מחזורית. **זוהי המטוטלת המתימטית** (ראו איור).
- כ"ציר" התנודה תשמש הקשת אשר לאורכה נע הגוף.
- הנקודה התחתונה היא הנקודה עבורה x=0.
- שימו לב לכיוון החיובי של ציר x.



- תנודה זו **<u>אינה ת.ה.פ.</u>** נוכיח זאת בשקופית הבאה.

מטוטלת מתימטית

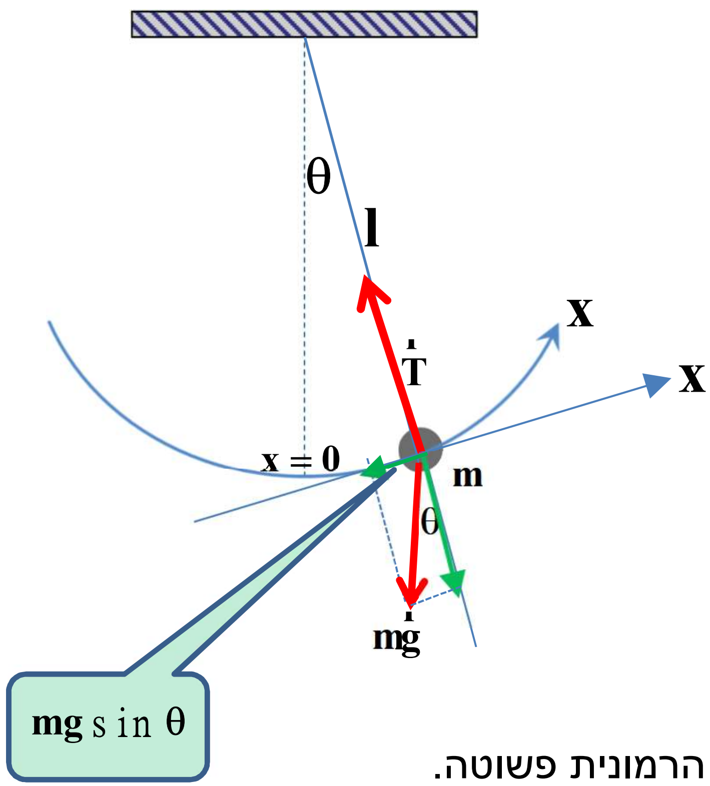
הוכחה

כדי להוכיח שחלקיק נע בת.ה.פ יש להראות שהכוח השקול הפועל עליו מקיים: $\sum F_x = -Cx$.

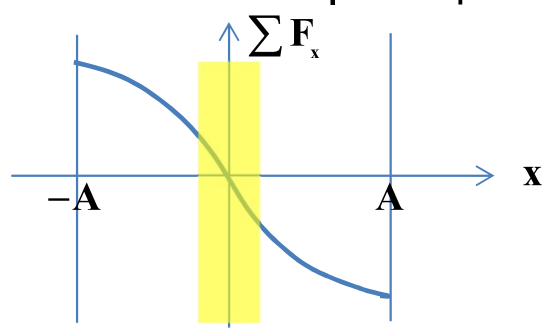
x במקרה זה הוא אורך הקשת. כלומר: $x = l\theta_{radians}$.

רכיב הכוח השקול בכיוון x הוא: $\sum F_x = -mg\sin\theta$.

וכתלות ב x הוא: $\sum F_x = -mg\sin\frac{x}{l}$

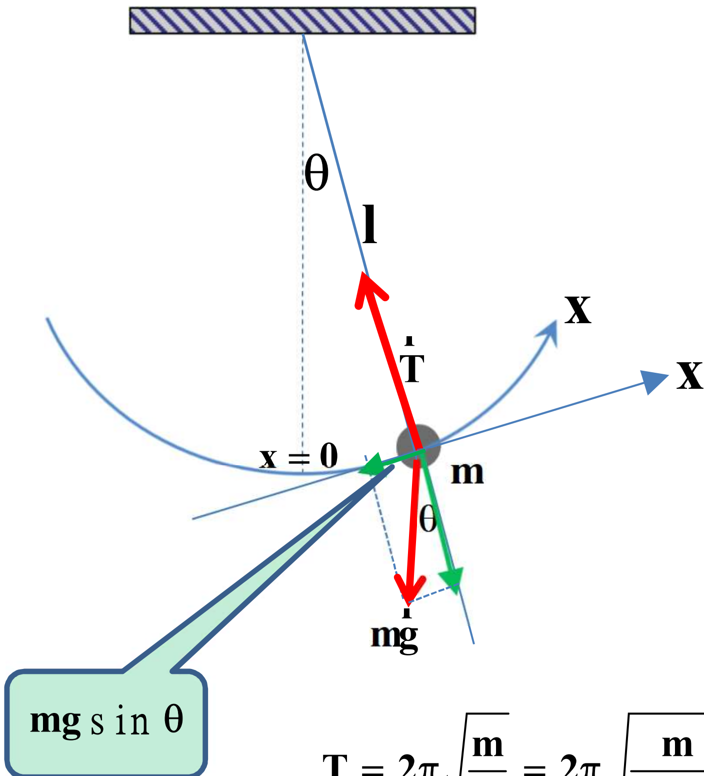


הגרף המתאר את רכיב הכוח השקול בכיוון x הוא:



זהו אינו גרף לינארי יורד כנדרש עבור ת.ה.פ. לכן תנודה זו אינה הרמונית פשוטה.
עם זאת-אם אמפליטודת התנודה תהיה קטנה (בתחום הצהוב)-ניתן להבחין כי הגרף דומה מאד לגרף לינארי יורד וזו אינדיקציה לכך שבאמפליטודות קטנות-מטוטלת מתימטית תבצע תנודה שהיא ת.ה.פ בקירוב.
נִראה זאת בשקופית הבאה.

מטוטלת מתימטית



- רכיב הכוח השקול בכיוון x הוא : $(1)\ \sum F_x = -mg\sin\theta$
- בזוויות קטנות : $\sin\theta \approx \theta_{radians}$
- נציב במשוואה (1) : $(2)\ \sum F_x \approx -mg\theta_{radians}$
- אבל: $\theta_{radians} = \frac{x}{l}$
- נציב במשוואה (2): $(3)\ \sum F_x \approx -\frac{mg}{l}x$
- לכן, בקירוב לזויות קטנות: $(4)\ \sum F_x \approx -\frac{mg}{l}x$
- כלומר : $(4)\ \sum F_x \approx -Cx \Rightarrow$ **ת.ה.פ**
- זוהי, בקירוב, ת.ה.פ שזמן המחזור שלה הוא: $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{C}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{mg/l}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}$$

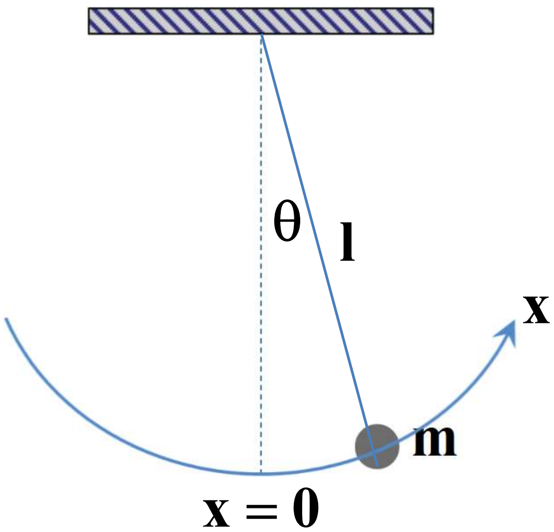
דוגמא 7

- מטוטלת מתימטית משמשת כשעון מטוטלת. השעון מפגר בכל יממה בעשר שניות.

על מנת לתקן את התקלה ולהביא את השעון למצב בו ידייק, אפשר לשנות את אורך החוט.

א- האם יש לקצר או להאריך את החוט? נמקו!

ב- בכמה אחוזים יש לשנות את אורכו של החוט ?



פתרון דוגמא 7

- מטוטלת מתימטית משמשת כשעון מטוטלת. השעון מפגר בכל יממה בעשר שניות.

  על מנת לתקן את התקלה ולהביא את השעון למצב בו ידייק, אפשר לשנות את אורך החוט.

  א- האם יש לקצר או להאריך את החוט? נמקו!

  ב- בכמה אחוזים יש לשנות את אורכו של החוט ?

פתרון סעיף א'

מאחר וזמן המחזור ארוך מהנדרש והוא יקטן אם נקטין את אורך החוט: $\left[T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\right]$. אזי ברור שעלינו לקצר את החוט.

פתרון סעיף ב'

ביממה יש: $86400_{sec} = 24_{hours/day} \cdot 60_{min/hour} \cdot 60_{sec/min}$.

נסמן את זמן המחזור הנוכחי (השגוי, כשאורך החוט הוא l_1) ב-T_1.

נסמן את זמן המחזור הרצוי (התקין כשאורך החוט הוא l_0) ב-T_0.

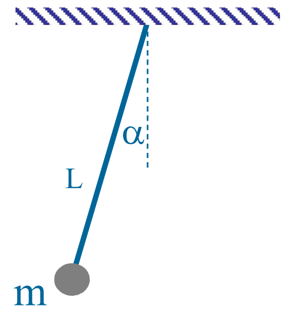
נסמן את מספר המחזורים ב: n.

היחס בין זמני המחזור $\sqrt{\frac{l_0}{l_1}} = \frac{2\pi\sqrt{l_0/g}}{2\pi\sqrt{l_1/g}} = \frac{T_0}{T_1}$. הדרישה: $\sqrt{\frac{l_0}{l_1}} = \frac{86400}{86410} = \frac{nT_0}{nT_1}$,

לכן: $\frac{l_0}{l_1} = 0.99988 = 99.988\%$. ועלינו לקצר את החוט ב- **0.012%**=(100-99.988)%

דוגמא 8

חלקיק קטן בעל מסה $m=0.5kg$ קשור לחוט שאורכו $L=60cm$. החלקיק מוסט בזווית $\alpha=5°$ מן האנך. (הניחו שזו זוית קטנה מספיק לצורך קירוב הרמוני). ומשוחררת ממנוחה לתנועה ספונטאנית.



א. מהו זמן המחזור של התנועה?

ב. לאחר כמה זמן מרגע השחרור תחלוף המסה דרך הנקודה הנמוכה ביותר של מסלולה :

1. בפעם הראשונה?
2. בפעם השנייה?

ג. מהי גודלה המקסימאלי של מהירות החלקיק?

ד. מהי משרעת התנועה?

הניחו שבזמן $t=0$ משוחרר החלקיק מהנקודה: $x=A$

ה. מהו הביטוי להעתק כפונקציה של הזמן?

פתרון דוגמא 8

א.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\lambda}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{0.6}{g}} = 1.539\sec$$

ב. 1. לאחר רבע זמן מחזור:

$$t = \frac{T}{4} = \frac{1.539}{4} = 0.384\sec$$

2. לאחר שלושת רבעי זמן מחזור:

$$t = \frac{3}{4}T = \frac{3}{4}\cdot 1.539 = 1.154\sec$$

ג. שימור אנרגיה (מקצה האמפליטודה עד נקודת שיווי המשקל):

$$mgh = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2g(\lambda - \lambda\cos\alpha)} = \sqrt{2g(0.6 - 0.6\cos 5)} = 0.213\frac{m}{\sec}$$

ד.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\pi\sqrt{\frac{\lambda}{g}}} = \sqrt{\frac{g}{\lambda}} = \sqrt{\frac{g}{0.6}} = 4.082\frac{rad}{\sec}$$

$$v_{\max} = \pm\omega\cdot A = \pm\sqrt{\frac{g}{\lambda}}\cdot A \Rightarrow 1.256 = \pm\sqrt{\frac{g}{0.6}}\cdot A \Rightarrow A = \pm 0.307m$$

ה.

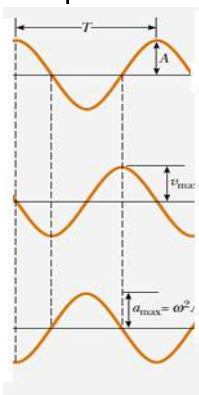
$$x(t) = A\cos(\omega t) = -0.307\cos(4.082\times t)m$$

סיכום השעור (1)

◄ פונקציות הת.ה.פ :

– כתלות בזמן:

$\varphi = 0$

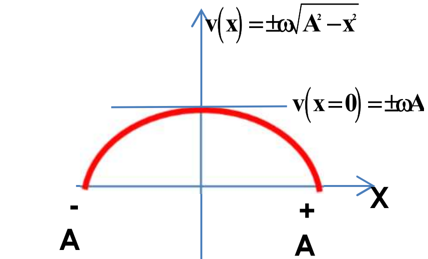


$$(1)\quad x(t) = A\cos(\underbrace{\omega t + \varphi}_{\theta})$$

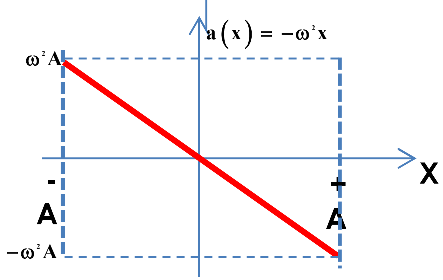
$$(2)\quad v(t) = -\omega A\sin(\underbrace{\omega t + \varphi}_{\theta})$$

$$(3)\quad a(t) = -\omega^2 A\cos(\underbrace{\omega t + \varphi}_{\theta})$$

– כתלות במיקום:



$$v(x) = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2}$$



$$a(x) = -\omega^2 x$$

סיכום השעור (2)

◄ זמן מחזור ותדירות :

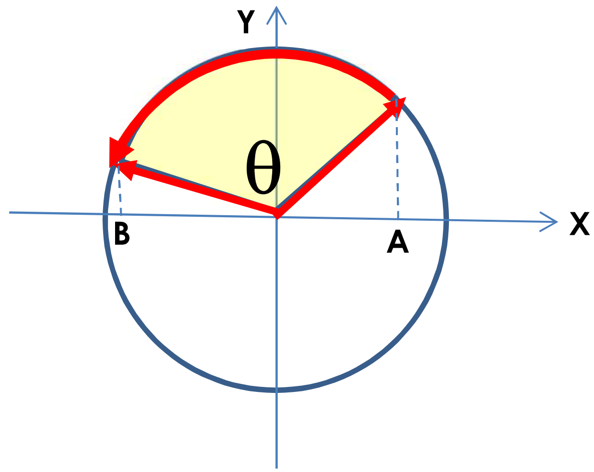
$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{C}{m}}$$

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{C}{m}} \quad ; \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{C}}$$

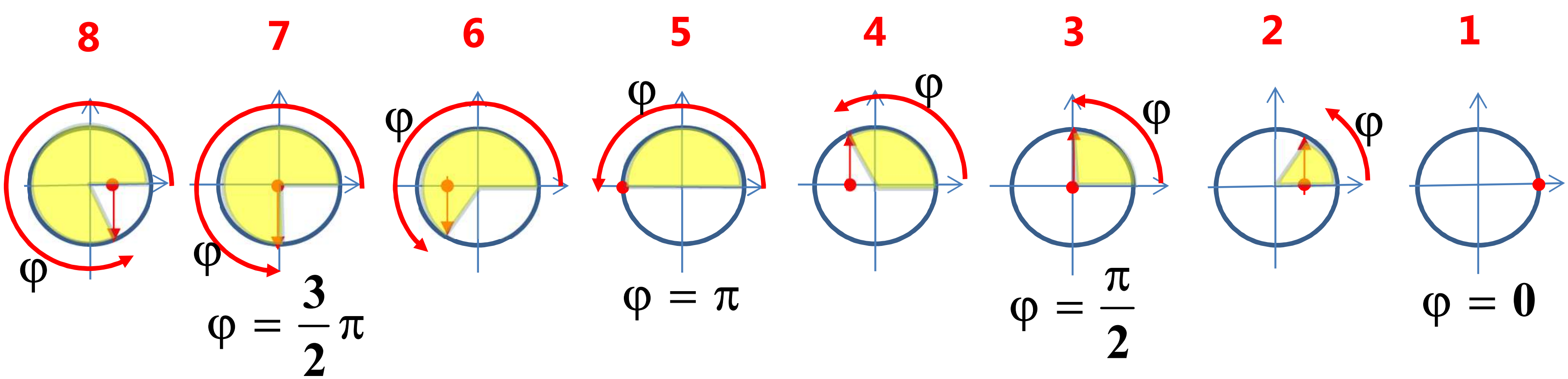
סיכום השעור (3)

◄ זמן מעבר מנקודה לנקודה :



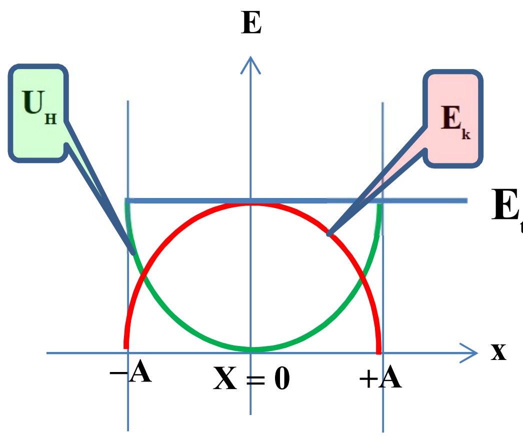
$$\frac{t}{T} = \frac{\theta_{rad}}{2\pi_{rad}} = \frac{\theta^{\circ}}{360^{\circ}}$$

◄ חישוב זוית מופע :



סיכום השעור (4)

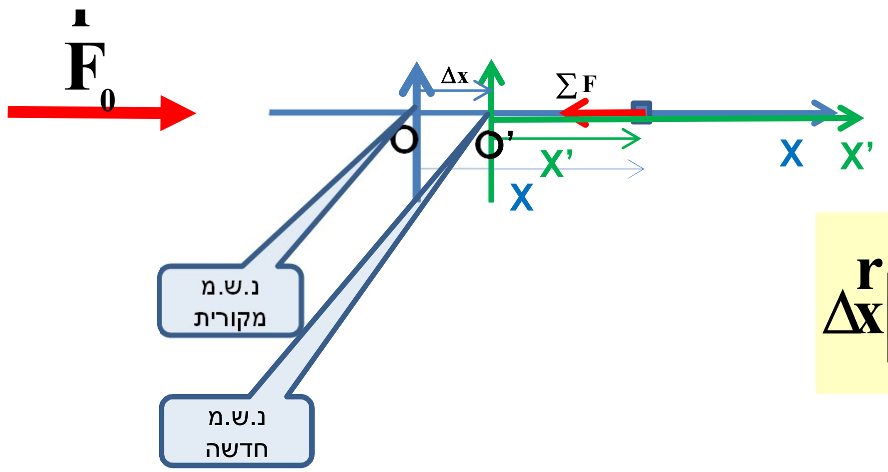
◄ מאזן אנרגטי בת.ה.פ :



$$E_{tot} = E_k + U_H = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Cx^2 = constant$$

◄ הזזת נ.ש.מ :

כח קבוע המתווסף
לכח ההרמוני

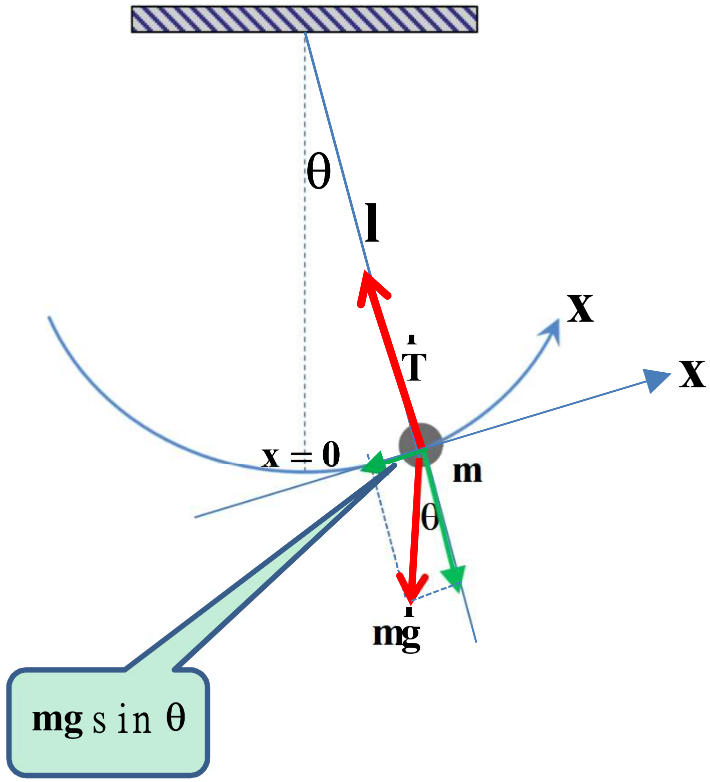


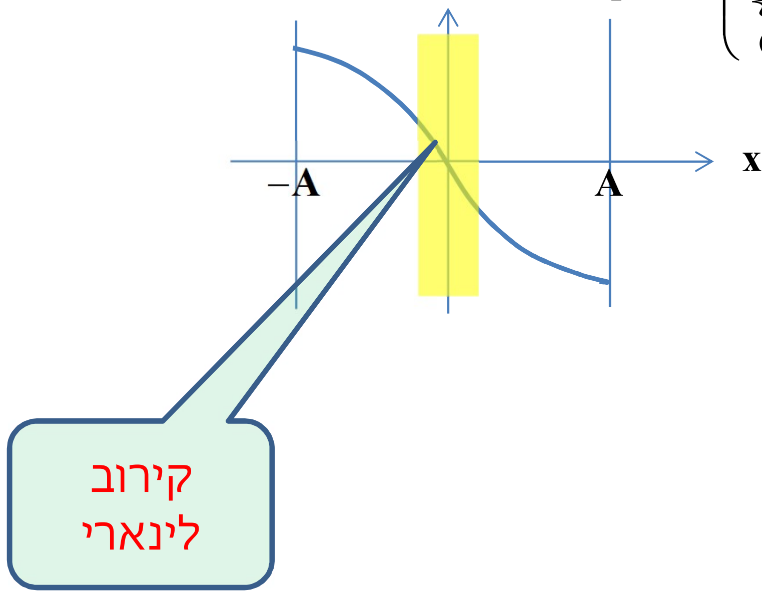
$$\Delta\vec{x}\left[\text{נ.ש.מ}\right] = \frac{\vec{F}_0}{C}$$

סיכום השעור (5)

◄ מטוטלת מתימטית :

$$\sum F_x = -mg\sin\frac{x}{l} \approx -\underbrace{\left(\frac{mg}{l}\right)}_{C}x$$





$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$