

חוקי קפלר

חזרה על תנועה מעגלית

חזרה באופטיקה



image courtesy of Idea go at FreeDigitalPhotos.net

◀ החוק הראשון של קפלר (1609)

כוכבי הלכת נעים סביב השמש במסלול אליפטי, כשהשמש נמצאת באחד ממוקדיו.

◀ החוק השני של קפלר (חוק השטחים)

הרדיוס-וקטור (הישר המחבר בין השמש לכוכב לכת) מכסה במהלך תנועתו של כוכב הלכת שטחים שווים בפרקי זמן שווים.

◀ החוק השלישי של קפלר (חוק המחזורים) (1618)

ריבוע זמן המחזור (T) של כוכב לכת בתנועתו סביב השמש מצוי ביחס ישר לחזקה השלישית של מרחקו הממוצע מן השמש (R).

$$T^2 = kr^3$$

$$\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3$$

1. חשבו את k עבור מערכת השמש בעזרת הנתונים הבאים: רדיוס הסיבוב של כדור הארץ סביב השמש $150,000,000$ ק"מ, וזמן המחזור 365 ימים.
2. נתון כי זמן המחזור של מאדים סביב השמש הוא 687 ימים. חשבו את רדיוס הסיבוב של מאדים בשני אופנים שונים.

1. חשבו את k עבור מערכת השמש בעזרת הנתונים הבאים: רדיוס הסיבוב של כדור הארץ סביב השמש $150,000,000$ ק"מ, וזמן המחזור שלו הוא 365 יום.

$$T^2 = kr^3$$

$$k = \frac{T^2}{r^3} = \frac{(365 \cdot 24 \cdot 3600)^2}{(150,000,000,000)^3}$$

$$k = 2.94 \cdot 10^{-19} \frac{\text{sec}^2}{\text{m}^3}$$

◀ שימו לב שאם משתמשים בנוסחה זו ביחידות שרירותיות (שנבחרות במיוחד, כמובן) התוצאה של k עבור מערכת השמש הופכת להיות פשוטה מאוד. ניקח את T להיות שווה ל-1 שנה, ואת R ליחידה אסטרונומית אחת (רדיוס הסיבוב של כדור הארץ סביב השמש), ונקבל:

$$T^2 = kr^3$$

$$k = \frac{T^2}{r^3} = \frac{1^2}{1^3}$$

$$k = 1 \frac{\text{sec}^2}{\text{m}^3}$$

2. נתון כי זמן המחזור של מאדים סביב השמש הוא 687 ימים. חשבו את רדיוס הסיבוב של מאדים בשני אופנים שונים.

◀ נחשב בעזרת נתוני כדור הארץ:

$$\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^3$$

$$\left(\frac{365 \cdot 24 \cdot 3600}{687 \cdot 24 \cdot 3600}\right)^2 = \left(\frac{150 \cdot 10^9}{R_2}\right)^3$$

$$R_2 = 2.28 \cdot 10^{11} m$$

$$R_2 = 228,000,000 km$$

◀ נחשב בעזרת הקבוע k (שמצאנו בסעיף הקודם)-

$$T^2 = kr^3$$

$$r^3 = \frac{T^2}{k} = \frac{(687 \cdot 24 \cdot 3600)^2}{2.94 \cdot 10^{-19}}$$

$$r = 2.29 \cdot 10^{11} m$$

$$r = 229,000,000 km$$

◀ ההבדל בתוצאות נובע מעיגול מהספרים.

הירח נע סביב כדור הארץ, וכל הזמן מפנה אליו אותו "צד". הירח משלים סיבוב מעגלי שלם סביב כדור הארץ במשך 27.3 יממות ארציות. משני נתונים אלה נובע כי הירח מסתובב גם סביב צירו, וזמן המחזור שלו הוא 27.3 יממות ארציות.

מהנדס עוסק בתכנון תקשורת בין מושבות שיוקמו בעתיד על פני הירח. בדעתו להשתמש בלוויין תקשורת שינוע במסלול מעגלי סביב הירח, כך שזמן המחזור שלו יהיה 27.3 יממות ארציות, והוא יימצא כל העת מעל נקודה קבועה על פני הירח (בדומה ללווייני תקשורת שנעים מעל כדור הארץ).

1. חשב את רדיוס המסלול המעגלי של לווין כזה, בהנחה כי רק הירח משפיע עליו. נתון כי עבור מערכת הירח $k=8.05 \times 10^{-12}$

2. המהנדס חישב ומצא שבגלל השפעת כדור הארץ אי-אפשר למקם לווין במסלול שאת רדיוסו מצאת בסעיף א. הרדיוס המקסימאלי של מסלול לווין סביב הירח שבו אפשר להזניח את ההשפעה של כדור הארץ הוא כ- 3,000 km. חשב את זמן המחזור של לווין שנע סביב הירח במסלול מעגלי שרדיוסו 3,000 km.

3. ציין תרומה אחת לידע המדעי על אודות מערכת השמש או גרמי שמים במערכת זו, שתתפרסם אחד מהאישים האלה: ניקולס קופרניקוס, גלילאו גליליי, טיכו ברהה.

1. חשב את רדיוס המסלול המעגלי של לווין כזה, בהנחה כי רק הירח משפיע עליו. נתון כי עבור מערכת הירח, $k=8.05 \times 10^{-12}$
- ◀ לפי החוק השלישי של קפלר (נבטא את זמן המחזור בשניות):

$$T^2 = kr^3$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{T^2}{k}} = \sqrt[3]{\frac{(27.3 \cdot 24 \cdot 3600)^2}{8.05 \cdot 10^{-12}}} = 88,413,577m$$

$$r \cong 88,400km$$

2. המהנדס חישב ומצא שבגלל השפעת כדור הארץ אי-אפשר למקם לוויין במסלול שאת רדיוסו מצאת בסעיף א. הרדיוס המקסימאלי של מסלול לוויין סביב הירח שבו אפשר להזניח את ההשפעה של כדור הארץ הוא כ- 3,000 km. חשב את זמן המחזור של לוויין שנע סביב הירח במסלול מעגלי שרדיוסו 3,000 km.
- ◀ לפי החוק השלישי של קפלר:

$$\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3 = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2$$

$$\left(\frac{T_1}{27.3}\right)^2 = \left(\frac{3000}{88400}\right)^3$$

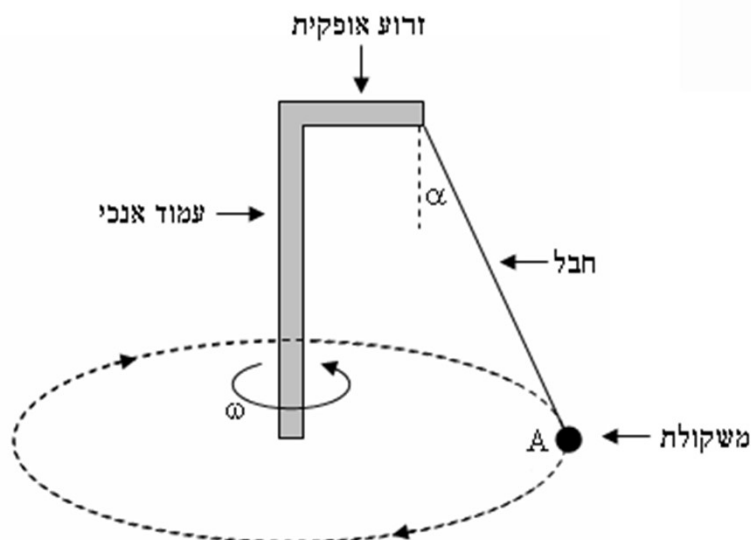
$$T_1 = 0.17d = 4.096h$$

3. ציין תרומה אחת לידע המדעי על אודות מערכת השמש או גרמי שמים במערכת זו, שתתפרש אחד מהאישים האלה: ניקולס קופרניקוס, גלילאו גליליי, טיכו ברהה.
- ▶ **קופרניקוס** - פיתח את המודל ההליוצנטרי, שלפיו כוכבי הלכת סובבים את השמש, מכאן שכדור הארץ אינו מרכז היקום אלא השמש.
 - ▶ **גלילאו** - היה הראשון שהשתמש בטלסקופ לצורך ביצוע תצפיות אסטרונומיות, ובעזרתו גילה את ארבעה מירחיו של צדק, מכתש הירח וכתמי שמש.
 - ▶ **טיכו ברהה** - גילה סופרנובה וערך תצפיות מדויקות של מסלולי כוכבי הלכת.

בתרשים שלפניך מתואר עמוד אנכי שיוצאת ממנו זרוע אופקית. לקצה הזרוע קשור חבל שמסתו ניתנת להזנחה, ולקצה החבל קשורה משקולת. התייחס למשקולת כאל גוף נקודתי.

העמוד מסתובב סביב צירו במהירות זוויתית קבועה ω , כך שהמשקולת נעה במסלול מעגלי אופקי במהירות שגודלה קבוע (מגמת התנועה מסומנת בתרשים), החבל יוצר זווית α עם הכיוון האנכי.

1. הסבר מדוע המשקולת מואצת אף על פי שגודל מהירותה קבוע, וציין מהו כיוון התאוצה.
2. האם הכוח השקול הפועל על המשקולת שווה לאפס? אם כן- הסבר מדוע; אם לא – ציין מהו כיוון פעולתו.
3. ציין מהו הכיוון של מהירות המשקולת ברגע שהיא חולפת בנקודה A (ראה תרשים).
4. בטא, באמצעות נתוני השאלה (ω ו- α), את רדיוס המסלול המעגלי של המשקולת.
5. מה צריך להיות גודל הזווית α כדי שתאוצת המשקולת תהיה שווה בגודלה לתאוצת הנפילה החופשית, g .



1. הסבר מדוע המשקולת מואצת אף על פי שגודל מהירותה קבוע, וציין מהו כיוון התאוצה.

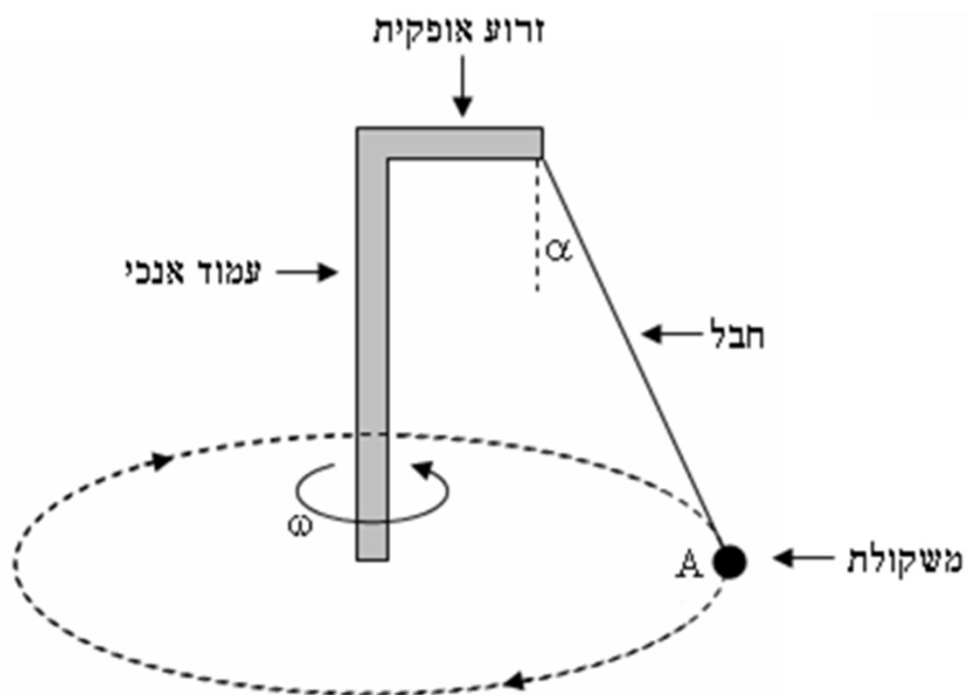
◀ המשקולת מואצת אף על פי שגודל מהירותה קבוע, כי וקטור המהירות משתנה בכיוונו.
כיוון התאוצה הוא כלפי מרכז המעגל.

2. האם הכוח השקול הפועל על המשקולת שווה לאפס? אם כן- הסבר מדוע; אם לא – ציין מהו כיוון פעולתו.

◀ מאחר ותאוצת המשקולת שונה מאפס על פי החוק השני של ניוטון גם הכוח השקול שונה מאפס.

פתרון 4 - המשך

3. ציין מהו הכיוון של מהירות המשקולת ברגע שהיא חולפת בנקודה A (ראה תרשים).
 ◀ כיוון מהירות המשקולת ב-A הוא משיק למעגל בכיוון מגמת התנועה.



4. בטא, באמצעות נתוני השאלה (ω ו- α), את רדיוס המסלול המעגלי של המשקולת.
 ◀ על פי החוק השני של ניוטון:

$$\sum F_y = 0$$

$$T \cos \alpha - mg = 0$$

$$(1) T \cos \alpha = mg$$

$$\sum F_R = ma_R$$

$$(2) T \sin \alpha = m\omega^2 \cdot R$$

◀ מחילוק משוואה (2) במשוואה (1):

$$\tan \alpha = \frac{\omega^2 R}{g} \Rightarrow R = \frac{g \cdot \tan \alpha}{\omega^2}$$

פתרון 4 - המשך

5. מה צריך להיות גודל הזווית α כדי שתאוצת המשקולת תהיה שווה בגודלה לתאוצת הנפילה החופשית, g .

◀ נידרש:

$$a_R = g$$

◀ נציב את R שקבלנו בסעיף הקודם: $a_R = \omega^2 \cdot R$

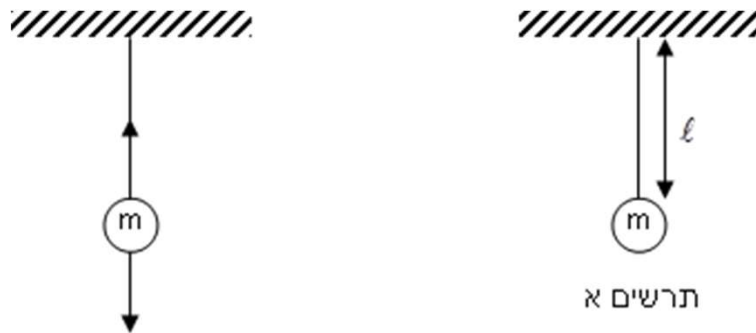
$$g = \omega^2 \cdot \frac{g \cdot \tan \alpha}{\omega^2}$$

$$\tan \alpha = 1$$

$$\alpha = 45^\circ$$

משקולת שמסתה m תלויה במנוחה על חוט באורך l , המחובר לתקרה (ראה תרשים א). הקוטר של המשקולת זניח ביחס לאורך החוט. תלמיד סימן את הכוחות הפועלים על המשקולת (ראה תרשים ב).

1. מי מפעיל על המשקולת את הכוח T , ומי מפעיל עליה את הכוח mg ?
2. התלמיד טען כי הכוחות T ו- mg הם זוג כוחות של פעולה ותגובה, לפי החוק השלישי של ניוטון. האם טענתו נכונה? נמק.



התלמיד הזיז את המשקולת בזווית α_0 מן האנך, הרפה – והמשקולת החלה להתנוודד כמטוטלת (זווית α_0 אינה בהכרח זווית קטנה)

3. בטא באמצעות m, g , ו- α_0 את המתיחות בחוט, ברגע שהמשקולת נמצאת בנקודות הקיצון של התנועה ($\alpha = \pm \alpha_0$)

4. בטא באמצעות m, g , ו- α_0 את המתיחות בחוט, ברגע שהמשקולת נמצאת בנקודה הנמוכה ביותר במסלולה.

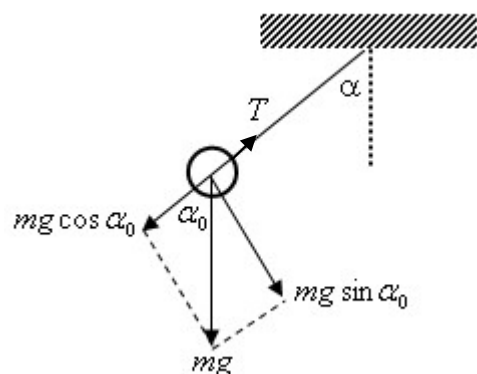
1. מי מפעיל על המשקולת את הכוח T , ומי מפעיל עליה את הכוח mg ?
◀ את הכוח T מפעיל החוט. את הכוח mg מפעיל כדור הארץ.

2. התלמיד טען כי הכוחות T ו- mg הם זוג כוחות של פעולה ותגובה, לפי החוק השלישי של ניוטון. האם טענתו נכונה? נמק.
- ▶ טענתו אינה נכונה.
 - ▶ התגובה לכוח mg אותו מפעיל כדור הארץ הוא הכוח שמפעילה המסה m על כדור הארץ.

פתרון 5 המשך

3. בטא באמצעות m , g , ו- α_0 את המתיחות בחוט, ברגע שהמשקולת נמצאת בנקודות הקיצון של התנועה ($\alpha = \pm \alpha_0$)

◀ בציר ה- y :



$$\sum F_y = 0$$

$$T - mg \cos \alpha_0 = 0$$

$$T = mg \cos \alpha_0$$

פתרון 5 המשך

4. בטא באמצעות m , g , ו- α_0 את המתיחות בחוט, ברגע שהמשקולת נמצאת בנקודה הנמוכה ביותר במסלולה.

◀ מהחוק השני של ניוטון: $\sum F_R = ma_R$

$$(1) T - mg = m \cdot \frac{v^2}{\lambda} \quad (R = \lambda)$$

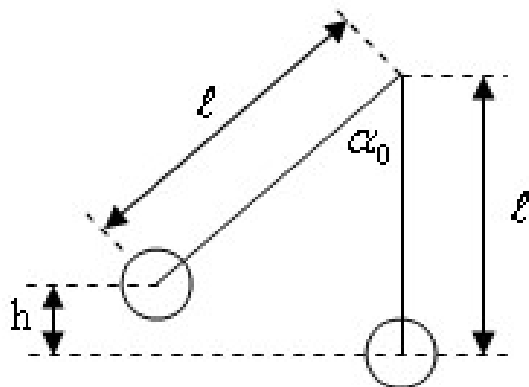
◀ נמצא את v בעזרת שיקולי אנרגיה. משימור אנרגיה בשיא הגובה h ובתחתית המסלול מתקבל:

$$mgh = \frac{mv^2}{2}$$

$$h = \lambda - \lambda \cos \alpha_0$$

$$mg(\lambda - \lambda \cos \alpha_0) = \frac{mv^2}{2}$$

$$(2) v^2 = 2g\lambda(1 - \cos \alpha_0)$$



◀ נציב בביטוי 1:

$$T = mg + \frac{m2g\lambda(1 - \cos \alpha_0)}{\lambda}$$

$$T = mg[1 + 2(1 - \cos \alpha_0)]$$

$$T = mg(3 - 2 \cos \alpha_0)$$

מכניקה ניוטונית חלק ב', עמוד 217

1. הראו, בעזרת גרף, כי זמני המחזור של תשעת גרמי השמיים שנתוניהם מופיעים בטבלה 1, והרדיוסים הממוצעים של מסלוליהם, מקיימים את החוק השלישי של קפלר. מומלץ להשתמש בגיליון אלקטרוני לשם סרטוט הגרף.

2. לו נתגלה כוכב לכת חדש אשר רדיוס מסלולו גדול פי שישה-עשר מזה של הארץ, מה היה זמן מחזור תנועתו סביב השמש?

3. התנועה של הארץ סביב השמש היא המהירה ביותר בחודש ינואר, והאיטית ביותר בחודש יוני. מתי מרחק הארץ מהשמש הוא הקצר ביותר? נמקו.