

מכניקה

שיקולים אנרגטיים בגרביטציה

חלק א'



◀ הקדמה

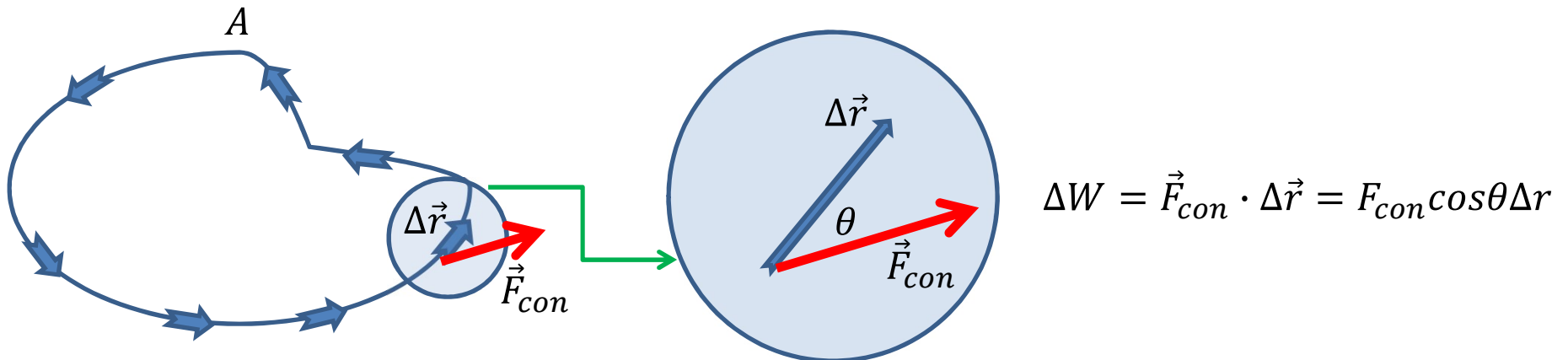
- כוח משמר.
- אנרגיה פוטנציאלית של כוח משמר.
- שדה כוח ושדה כוח משמר.
- ◀ אנרגיה פוטנציאלית גרביטציונית.
- ◀ אנרגיה פוטנציאלית גרביטציונית בסמיכות לפני כוכב.
- ◀ עקרון הסופרפוזיציה.

◀ **סימון:** נסמן כוח משמר כ- $\vec{F}_{conservative} = \vec{F}_{con}$.

◀ **הגדרה:** כוח יקרא משמר אם ורק אם עבודתו לאורך כל מסלול סגור היא תמיד אפס.

◀ הגדרה מתמטית: $W_{\vec{F}_{con}} = \oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint F \cos \theta dr \equiv 0$ (לכל מסלול סגור)

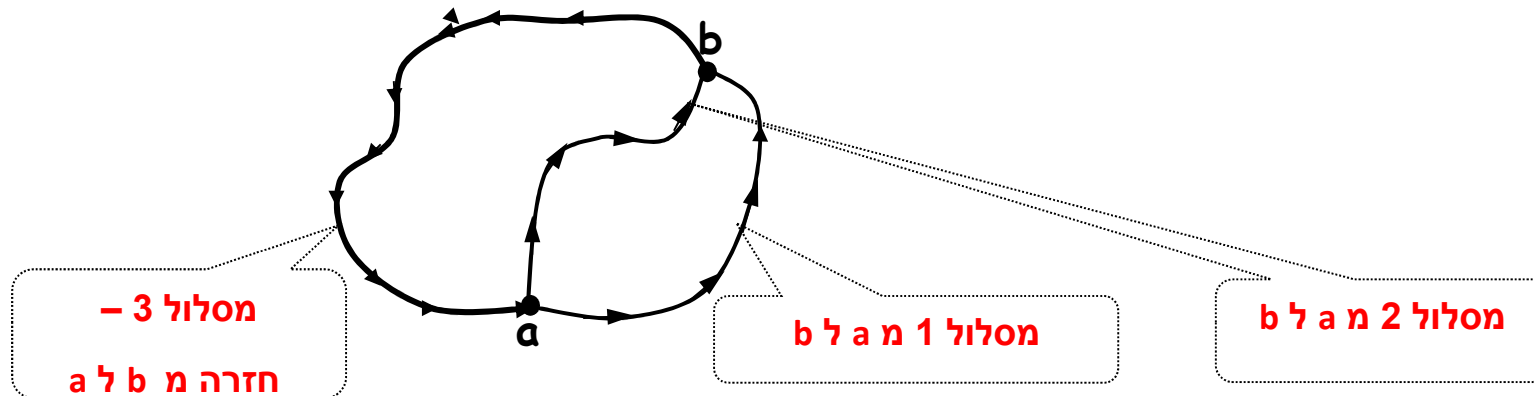
◀ הסבר: ישנם כוחות, שאם הם פועלים על חלקיק המבצע מסלול סגור כלשהו, עבודתם תמיד תתאפס. יתכן שבחלק מהמסלול הסגור, עבודת הכוח תהיה חיובית, אבל בחלקו האחר של המסלול הסגור היא תהיה שלילית. סך כל העבודה על פני כל המסלול הסגור תהיה תמיד אפס. כוחות אלו נקראים-**כוחות משמרים**.



$$W_{A-A} = \sum_A^A \Delta W = \sum_A^A \vec{F}_{con} \cdot \Delta \vec{r} = \oint \vec{F}_{con} \cdot d\vec{r} = 0$$

◀ **תוצאה:** כוח יקרא משמר אם ורק אם עבודתו לאורך כל מסלול פתוח מנקודה A אל נקודה B היא תמיד ערך קבוע שאינו תלוי בצורת המסלול.

◀ **הוכחה:**



◀ נעביר חלקיק מ a ל b במסלול (1) ונסמן את עבודתו ב W_1 . אחר כך נחזיר אותו ל a במסלול (3)

$$W_{a \rightarrow a} = W_1 + W_3 = 0 \Rightarrow W_1 = -W_3 \quad \text{ונסמן את עבודתו ב } W_3. \text{ נקבל:}$$

◀ נעביר חלקיק מ a ל b במסלול (2) ונסמן את עבודתו ב W_2 . אחר כך נחזיר אותו ל a במסלול (3)

$$W_{a \rightarrow a} = W_2 + W_3 = 0 \Rightarrow W_2 = -W_3 \quad \text{ונסמן את עבודתו ב } W_3. \text{ נקבל:}$$

◀ ומכאן נובע: $W_1 = W_2$. כלומר עבודת הכוח המשמר אינה תלויה בצורת המסלול. מ.ש.ל.

◀ **מסקנה :** עבודתו של כוח משמר הפועל על חלקיק הנע מנקודה A אל נקודה B במרחב, תלויה, עד כדי קבוע, רק במיקומן במרחב של הנקודות A ו B.

◀ מסקנה זו נובעת מכך שעבודתו של הכוח המשמר אינה תלויה בצורת המסלול שלאורכו נע החלקיק כשעבר מנקודה A אל נקודה B.

◀ למסקנה זו ישנה משמעות רבה שכן היא מאפשרת "לייצר נוסחא אפוייה" המייצגת את עבודתו של כל כוח משמר הפועל על חלקיק הנע מנקודה A במרחב אל נקודה B במרחב. כלומר:

$$W_{\vec{F}_{con}A \rightarrow B} = f(x_B, y_B, z_B) - f(x_A, y_A, z_A)$$

נוסחא זו תאפשר (לאחר פיתוחה עבור כוחות משמרים חשובים) לחשב את עבודת הכוחות המשמרים פשוט ע"י הצבת נתוני השפה בנקודות A ו B :
"נוסחא אפוייה" זו נקראת-"אנרגיה פוטנציאלית של כוח משמר".

אנרגיה פוטנציאלית של כוח משמר

◀ לכל כוח משמר ניתן "להצמיד" אנרגיה פוטנציאלית.

◀ אנרגיה פוטנציאלית מיוחסת לחלקיק הנמצא בנקודה כלשהי P , ביחס לנקודת ייחוס O . האנרגיה הפוטנציאלית בנקודת הייחוס O מוגדרת כאפס.

◀ אנרגיה פוטנציאלית של חלקיק הנמצא בנקודה P , מהווה אנרגיה האצורה בגוף, שנוצרה עקב עבודתו של כוח משמר, שפעל על החלקיק כשעבר מנקודת הייחוס O אל הנקודה P . אנרגיה זו עשויה להשתחרר ולהפוך לאנרגיה קינטית של החלקיק בתנאים מסוימים.

◀ לכל כוח משמר "צמודה" אנרגיה פוטנציאלית משלו שיש לה נוסחא מוגדרת. הנוסחא שונה מכוח משמר אחד למשנהו, אך הגדרת האנרגיה הפוטנציאלית משותפת לכל הכוחות המשמרים. (ראו בהמשך).

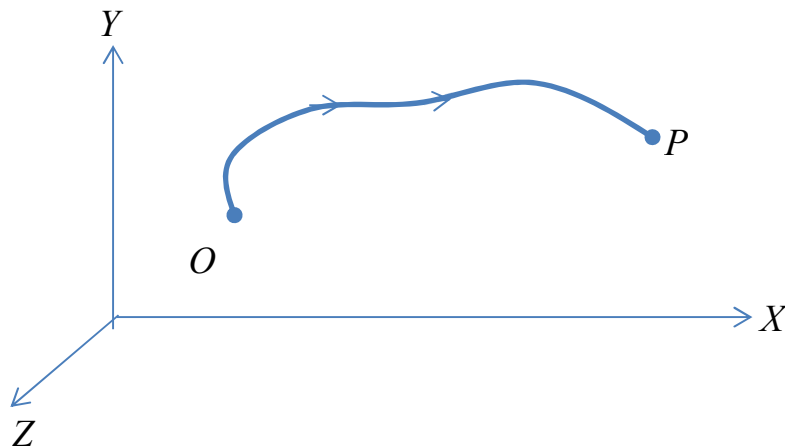
◀ הסימון המקובל לאנרגיה פוטנציאלית של חלקיק הוא: U .
למשל:

- אנרגיה פוטנציאלית של כוח הכובד תסומן כ U_g .
- אנרגיה פוטנציאלית של כוח קפיצי תסומן כ U_e .
- אנרגיה פוטנציאלית של כוח חשמלי תסומן כ U_{elc} . וכו'...

הערה: ישנם המסמנים אנרגיה פוטנציאלית ב E_p .

הגדרת האנרגיה פוטנציאלית של כוח משמר

- ◀ נתון כוח משמר **מסוים** : $\vec{F}_{con}$
- ◀ נקבע נקודת ייחוס O . (מיקום נקודת הייחוס הוא שרירותי ונתון לבחירתנו).
- ◀ נתייחס לחלקיק הנמצא בנקודה כלשהי במרחב P .
- ◀ נסמן את האנרגיה הפוטנציאלית של החלקיק הנמצא בנקודה P , ביחס לנקודת הייחוס O כ: $U_{P/O}$.



◀ נגדיר :

$$U_{P/O} \equiv -E_{\vec{F}_{con} O \rightarrow P}$$

מקרא: האנרגיה הפוטנציאלית עבור הכוח המשמר $\vec{F}_{con}$ של חלקיק הנמצא בנקודה P , ביחס לנקודת הייחוס O , מוגדרת **כמינוס** עבודת הכוח המשמר הפועל על החלקיק, כאשר החלקיק עובר מנקודת הייחוס O אל הנקודה P .

אנרגיה פוטנציאלית - תהליך קוויזיסטטי

◀ **קוויזיסטטי = קוויזיסטטי.** כלומר כמעט סטטי.

◀ כשחלקיק מועבר מנקודה A לנקודה B בתהליך קוויזיסטטי, הכוונה היא שמעבירים אותו באיטיות רבה מאד מ A ל B. במהירות אפסית (אך לא אפס).

◀ אם על החלקיק פועל כוח משמר $\vec{F}_{con}$ וזהו הכוח היחיד הפועל עליו, אזי, אם נרצה להעביר את החלקיק מנקודה A אל נקודה B, בתהליך קוויזיסטטי, נצטרך להפעיל עליו כוח חיצוני $\vec{F}_{ext}$, כזה שיגרום לחלקיק לנוע במהירות אפסית.

◀ כדי שכך יקרה, חייב להתקיים: $\vec{F}_{ext} = -\vec{F}_{con}$. כלומר הכוח החיצוני צריך להיות שווה בגדלו והפוך בכיוונו לכוח המשמר.

◀ במצב עניינים זה יימצא החלקיק, לאורך המסלול כולו, בשיווי משקל שכן: $\Sigma \vec{F} = \vec{F}_{ext} + \vec{F}_{con} = 0$

◀ גם כשהמסלול מעוקם, יישמר מעשית שיווי המשקל, משום שהתאוצה הצנטריפטלית המתחייבת ממסלול עקום תהיה זניחה, מאחר והמהירות זניחה (שהרי $a_c = \frac{V^2}{R}$).

אנרגיה פוטנציאלית של כוח משמר-תהליך קוויזיסטטי

- ◀ כעת נוכל להגדיר את המושג אנרגיה פוטנציאלית של חלקיק הנמצא בנקודה P, עבור כוח משמר באמצעות הגדרה אלטרנטיבית (חלופית). הגדרה זו תהיה שקולה לחלוטין להגדרה המקורית:
- ◀ ההגדרה המקורית:

$$U_{P/O} \equiv -W_{\vec{F}_{con} O \rightarrow P}$$

- ◀ ההגדרה השקולה:

$$U_{P/O} \equiv +W_{\vec{F}_{ext} O \rightarrow P} \left(\begin{array}{c} \text{בתהליך} \\ \text{קוויזיסטטי} \end{array} \right)$$

- ◀ לסיכום: אנרגיה פוטנציאלית עבור כוח משמר $\vec{F}_{con}$ כלשהו, של חלקיק הנמצא בנקודה P במרחב, ביחס לנקודת יחוס O (אותה עלינו לקבוע מראש), תוגדר כך:

$$U_{P/O} \equiv -W_{\vec{F}_{con} O \rightarrow P}$$

$$or: +W_{\vec{F}_{ext} O \rightarrow P} \left(\begin{array}{c} \text{בתהליך} \\ \text{קוויזיסטטי} \end{array} \right)$$

מקרה פרטי עבור כח הכובד - אנרגיה פוטנציאלית כבדית (1)

◀ סימון: U_G

- ◀ מטען יוצר גרביטציוני M (מסת גרביטציה), נטוע במקומו ואינו יכול לזוז. מטען בוחן גרביטציוני m (מסת גרביטציה שאת ההשפעה עליה אנחנו בוחנים), נמצא במרחק אינסופי מהמטען היוצר.
- עלינו לחשב את האנרגיה הפוטנציאלית הכבדית של מטען הבוחן m , כאשר הוא יימצא בנקודה P כלשהי במרחב, במרחק r מהמטען היוצר M . אנרגיה פוטנציאלית זו נובעת מכוח הגרביטציה, המשמר אשר M מפעיל על m , כאשר m הועבר מנקודת הייחוס O אל נקודת היעד P .
- ◀ כדי לחשב את האנרגיה הפוטנציאלית הזו, עלינו להתבסס על אחת מהגדרות האנרגיה הפוטנציאלית של כוח משמר.

◀ נתבסס על ההגדרה: $U_{P/O} \equiv -W_{\vec{F}_{co} \ O \rightarrow P}$

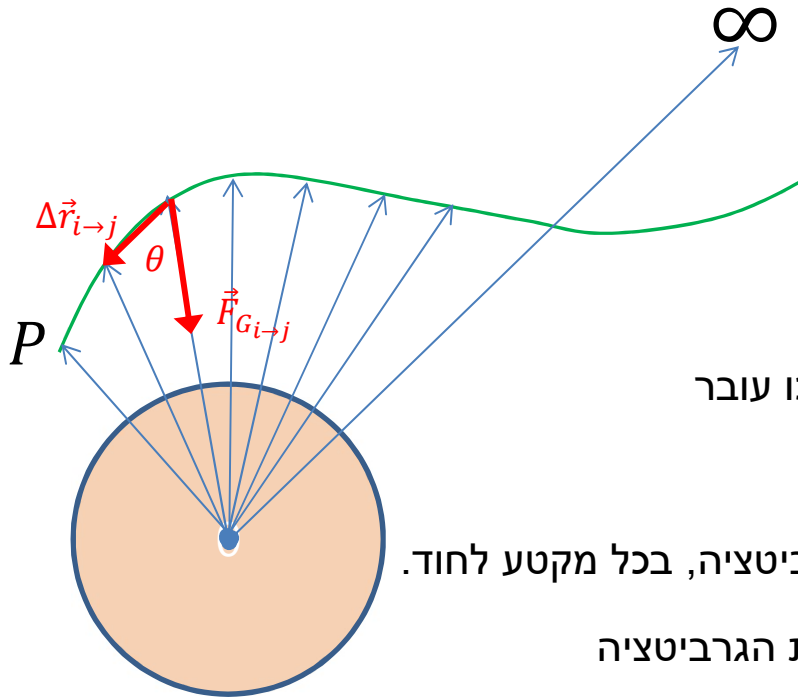
- את נקודת הייחוס, O , עבורה האנרגיה הגרביטציונית של m תוגדר כאפס, נקבע במרחק אינסופי מ M (כלומר באינסוף). (ראו איור בשקופית הבאה).
- הכוח המשמר, עבורו נקבעת אנרגיה פוטנציאלית זו הוא כוח הגרביטציה שמטען הגרביטציה היוצר M , מפעיל על מטען הבוחן הגרביטציוני m .

– גדלו של כוח זה הוא: $F_G = G \cdot \frac{Mm}{r^2}$

מקרה פרטי עבור כח הכובד - אנרגיה פוטנציאלית כבדית (2)

עלינו לחשב את האנרגיה הפוטנציאלית הכובדית של חלקיק הבוחן m כאשר הוא ימצא בנקודה P המרוחקת מרחק r_p ממרכז כדור המסה (לצורך הדיון-כוכב) : M .

על פי ההגדרה: $U_{P/\infty} \equiv -W_{\vec{F}_{con\infty \rightarrow P}} \quad (1)$



1. מאחר וכוח הגרביטציה משתנה בגדלו ובכיוונו כשחלקיק

הבוחן עובר מנקודה לנקודה, נחלק את המסלול אשר לאורכו עובר

החלקיק למקטעים קטנטנים (דיפרנציאליים).

2. נחשב את עבודתו החלקית (הדיפרנציאלית), של כוח הגרביטציה, בכל מקטע לחוד.

3. נסכום סקלרית את כל העבודות החלקיות ונקבל את עבודת הגרביטציה

הכוללת בעת מעברו של חלקיק הבוחן m , מאינסוף אל הנקודה P .

4. נציב את התוצאה באגף ימין של הגדרת האנרגיה הפוטנציאלית (1).

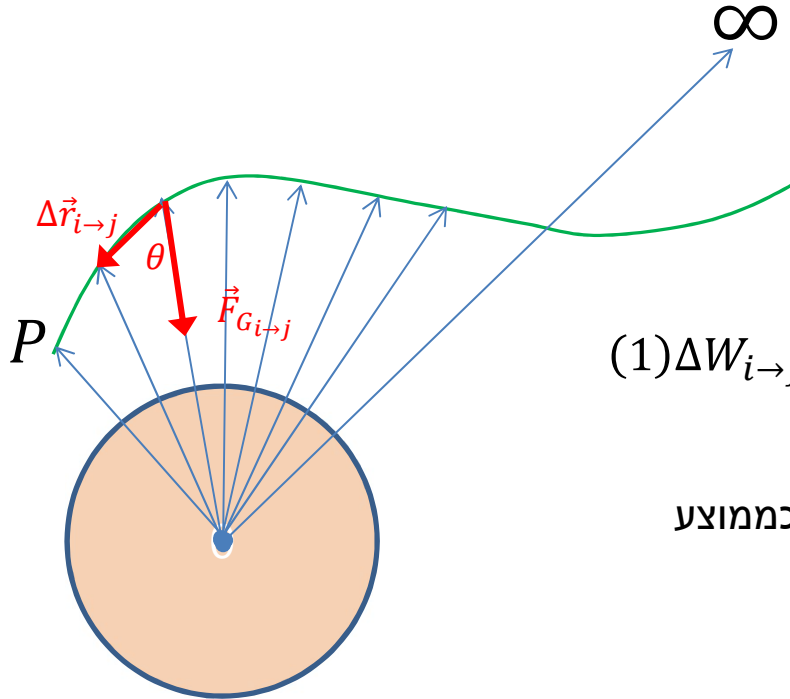
בשקופית הבאה נבצע את התהליך הנ"ל.

מקרה פרטי עבור כח הכובד - אנרגיה פוטנציאלית כבדית (3)

◀ נבצע זאת:

1. חלוקת המסלול למקטעים קטנטנים מתוארת בסרטוט.

2. נבחר מקטע מייצג בו החלקיק עובר מנקודה i אל נקודה j .
עבודת כוח הגרביטציה ש M מפעיל על m היא:



$$(1) \Delta W_{i \rightarrow j} = \vec{F}_G \cdot \Delta \vec{r}_{i \rightarrow j} = F_G (\underbrace{\Delta r_{i \rightarrow j} \cos \theta}_{r_i - r_j}) = \frac{GMm}{r_{average}^2} (r_i - r_j)$$

נגדיר את המרחק הממוצע ממרכז הכובד אל הנקודות i ו j כממוצע

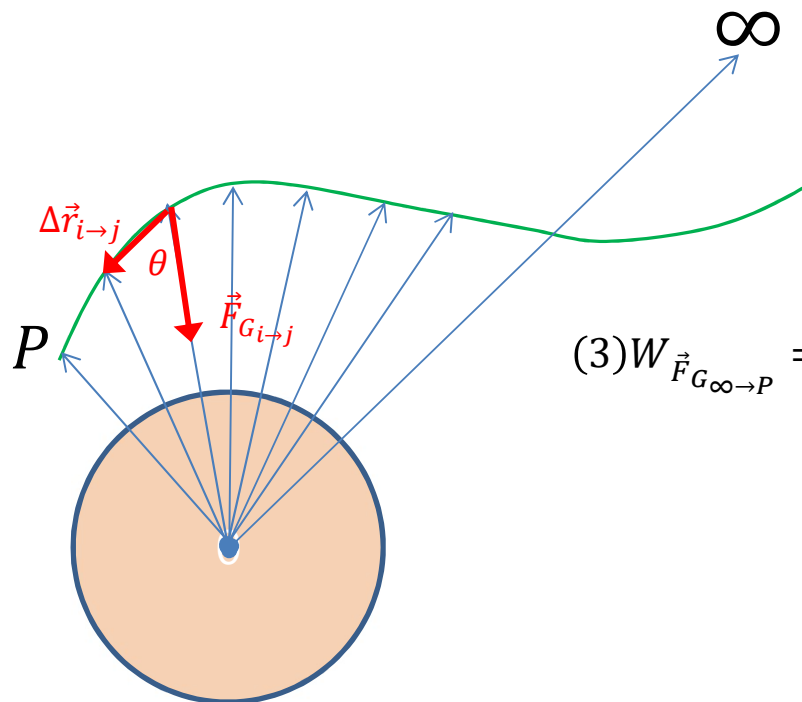
גיאומטרי של שני המרחקים: $r_{average\ ij} = \sqrt{r_i r_j}$.

(הבחירה בממוצע גיאומטרי נובעת מהמכנה בו מעלים בריבוע את המרחק הממוצע).

$$(2) \Delta W_{i \rightarrow j} = \frac{GMm}{r_{average}^2} (r_i - r_j) = \frac{GMm}{r_i r_j} (r_i - r_j) = GMm \left(\frac{1}{r_j} - \frac{1}{r_i} \right) \quad \text{נציב ב (1):}$$

המשך בשקופית הבאה.

מקרה פרטי עבור כח הכובד - אנרגיה פוטנציאלית כבדית (4)



3. כעת נסכום סקלרית את כל העבודות החלקיות של כוח הגרביטציה כאשר החלקיק עובר מאינסוף אל הנקודה P. נקבל טור טלסקופי :

$$(3) W_{\vec{F}_{G\infty \rightarrow P}} = \sum_{\infty}^P \Delta W_{i \rightarrow j} = GMm \sum_{\infty}^P \left(\frac{1}{r_j} - \frac{1}{r_i} \right) = GMm \left(\frac{1}{r_P} - \frac{1}{r_{\infty}} \right)$$

$$\frac{1}{r_{\infty}} = 0 \quad \text{אבל :}$$

$$(4) W_{\vec{F}_{G\infty \rightarrow P}} = \frac{GMm}{r_p} \quad \text{לכן :}$$

4. עתה נציב בהגדרת האנרגיה הפוטנציאלית : $(*) U_{P/\infty} \equiv -W_{\vec{F}_{con\infty \rightarrow P}}$

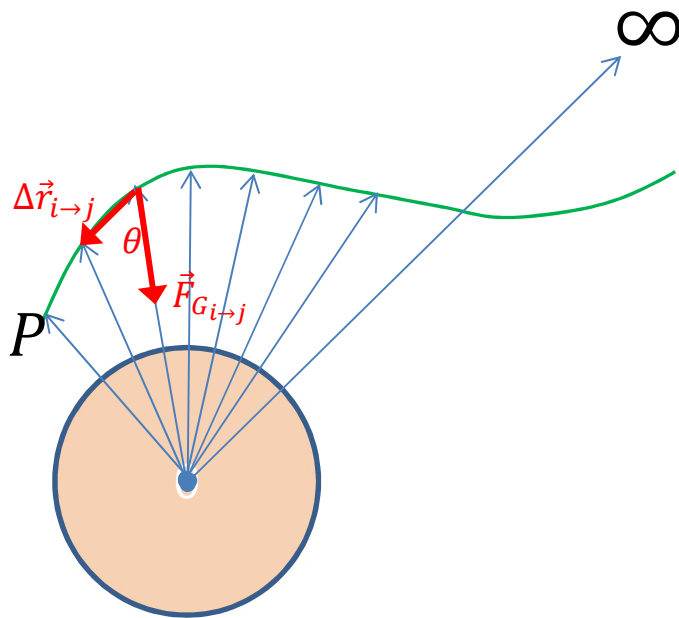
$$U_{GP/\infty} \equiv -W_{\vec{F}_{co} \infty \rightarrow P} = -\frac{GMm}{r_p} \quad \text{ונקבל :}$$

מקרה פרטי עבור כח הכובד - אנרגיה פוטנציאלית כבדית (5)

◀ קיבלנו :

$$U_{GP/\infty} = -\frac{GMm}{r_p}$$

◀ פיתוח מתמטי ליודעי חשבון דיפרנציאלי/אינטגרלי:



$$dW = \vec{F}_G \cdot d\vec{r} = \left(-\frac{GMm}{r^2} \hat{r} \right) \cdot (dr \hat{r}) = -\frac{GMm}{r^2} dr$$

$$\Rightarrow W_{\vec{F}_G} = \int_{\infty}^{r_p} -\frac{GMm}{r^2} dr = \frac{GMm}{r} \Big|_{\infty}^{r_p} = \frac{GMm}{r_p}$$

$$\Rightarrow U_{P/\infty} = -W_{\vec{F}_G} = -\frac{GMm}{r_p}$$

$$U_{GP/\infty} = -\frac{GMm}{r_p}$$

אנרגיה פוטנציאלית כבדית - דוגמא (1)

דוגמא 1

חשבו את האנרגיה הפוטנציאלית הכובדית של לוויין שמסתו m הנמצא בגובה של 3000 ק"מ מעל פני כדור הארץ. הניחו שהאנרגיה הפוטנציאלית הכובדית היא אפס במרחק אינסופי ממרכז כדור הארץ.

נתונים:

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \left[\frac{Nm^2}{kg^2} \right]$$

$$M_{EARTH} = 6 \cdot 10^{24} [kg]$$

$$R_{EARTH} = 6400 [km]$$

$$m = 500 [kg]$$

$$h = 3000 [km]$$

אנרגיה פוטנציאלית כבדית - דוגמא (1)-פתרון

פתרון דוגמא 1

$$U_{GP/\infty} = -\frac{GMm}{r_p} = \frac{GMm}{R+h}$$

$$U_{GP/\infty} = -\frac{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24} \cdot 500}{(6.4 + 3) \cdot 10^6} = -2.13 \cdot 10^{10} [J]$$

אנרגיה פוטנציאלית כבדית - דוגמא (2)

◀ דוגמא 2- העתקת נקודת יחוס

כאשר מגדירים את האנרגיה הפוטנציאלית הכובדית במרחק אינסופי מכוכב M כאפס (כלומר נקודת הייחוס לאנרגיה פוטנציאלית כבדית נקבעת במרחק אינסופי ממרכז הכוכב), אזי, קיבלנו את נוסחת האנרגיה הפוטנציאלית הכובדית, של מטען גרביטציה m, הנמצא במרחק r ממרכזו של כוכב הומוגני שמסתו M, כ :

$$U_{GP/\infty} = -\frac{GMm}{r}$$

הוכיחו, על סמך נוסחא זו, שאם היינו בוחרים כנקודת יחוס את פני הכוכב שרדיוסו R. הייתה מתקבלת הנוסחא:

$$U_{GP/R} = GMm \left[\frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right]$$

אנרגיה פוטנציאלית כבדית- דוגמא (2) - פתרון

פתרון דוגמא 2

זוהי בעיה של הזזת נקודת יחוס (מאינסוף אל פני הכוכב).
כדי שלא לסרבול את כיתוב המשוואות נסמן:

$$U_{Gr/\infty} = U_{r/\infty} = U_r - \underbrace{U_\infty}_0 = U_r$$

$$U_{GR/\infty} = U_{R/\infty} = U_R - \underbrace{U_\infty}_0 = U_R$$

כעת:

$$U_{r/R} = \underbrace{U_r}_{-\frac{GMm}{r}} - \underbrace{U_R}_{-\frac{GMm}{R}} = \left(-\frac{GMm}{r} \right) - \left(-\frac{GMm}{R} \right) = GMm \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right)$$

מ.ש.ל

דוגמא 3

בהמשך לדוגמא 2-הראו שאם תקבעו נקודת יחוס לאנרגיה פוטנציאלית כבדית-על פני כוכב M, תקבלו על פי נוסחת האנרגיה הגרביטציונית הכובדית, הכללית, שקיבלנו בדוגמא 3 :

$$U_{r/R} = GMm \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right)$$

את הצורה המוכרת לנו מפרק העבודה והאנרגיה : mgh , בתנאי שמטען הבוחן הגרביטציוני m ימוקם בסמיכות לפני הכוכב M . (כלומר כאשר : $h \ll R$).

כלומר- מתקיים "עיקרון ההתאמה"

הערה: "עיקרון ההתאמה" הוא מושג שטבע נילס בוהר בשנת 1923 בעקבות הויכוחים שניטשו לגבי הכללתה או אי הכללתה של תורת הקוונטים כתורה פיסיקלית. תורת הקוונטים מניבה תוצאות קלאסיות (כלומר של הפיסיקה הניוטונית) עבור העולם המקרוסקופי. כך גם-תורת היחסות מניבה תוצאות קלאסיות עבור חלקיקים איטיים.

אנרגיה פוטנציאלית כבדית-עיקרון ההתאמה-המשך

פתרון דוגמא 3

בדוגמא 2 קיבלנו תוצאה, לפיה, האנרגיה הפוטנציאלית הכובדית של מטען הבוחן הגרביטציוני m הנמצא בגובה h מעל פני כוכב M היא:

$$(1) U_{r/R} = GMm \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right)$$

אבל: $r = R + h$

$$(2) U_{r/R} = GMm \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h} \right) = \frac{GMm}{R(R+h)} h$$

נציב ב (1) ונקבל:

$$(3) U_{r/R} = \frac{GMm}{R \left(R + \underbrace{h}_{\text{neglected}} \right)} h \approx \frac{GMm}{R^2} h \quad \text{ומכאן:}$$

נשתמש בקירוב: $h \ll R$

$$(4) U_{r/R} \approx \frac{GMm}{R^2} h \approx m \underbrace{\left(\frac{GM}{R^2} \right)}_g h \approx mgh$$

ולבסוף

מ.ש.ל

◀ **סופרפוזיציה = חפיפה.**

◀ **מקור השם:** ניקולאוס סטנו (המאה ה-17), גיאולוג. רעיון השכבות הגיאולוגיות ה"מונחות" זו על זו וכך ניתן לקבוע את גילן היחסי של שכבות אלו.

◀ **סופרפוזיציה בפיסיקה:** תיאור מצב פיסיקלי כסכום של מצבים אחרים או פירוק מצב פיסיקלי לתתי מצב.

◀ **סופרפוזיציה במתמטיקה:** היכולת לחבר/לחפוף משוואות ליניאריות:

$$T(\vec{V} + \vec{U}) = T(\vec{V}) + T(\vec{U})$$

$$T(\alpha \vec{V}) = \alpha T(\vec{V})$$

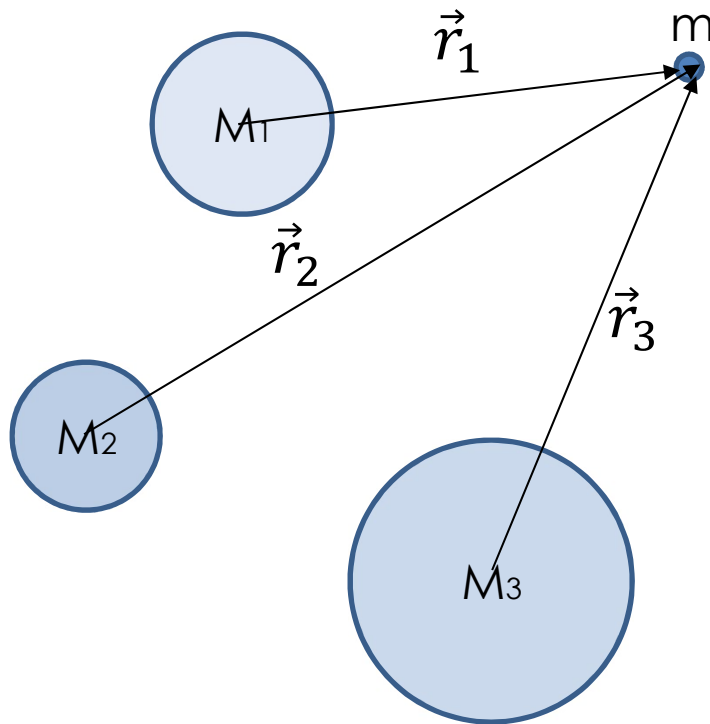
◀ **שימושים בפיסיקה:** גלים (ובפרט גלים אלקטרומגנטיים), וקטורים (ובפרט כוחות), קוונטים, אנרגיה...

דוגמאות

- ניתן לחבר ווקטורית מספר כוחות הפועלים על חלקיק ולחשב כוח שקול.
- ניתן לחבר ווקטורית מספר שדות המשפיעים על חלקיק ולחשב שדה שקול.
- ניתן לחבר סקלרית תרומות אנרגטיות של מספר "תורמי אנרגיה" לחלקיק ולחשב אנרגיה כוללת.
- ועוד...

אנרגיה פוטנציאלית כבדית-עיקרון הסופרפוזיציה

- אם ישנם מספר מטעני גרביטציה תורמי אנרגיה פוטנציאלית כובדית למטען בוחן גרביטציוני m , ניתן לחשב את האנרגיה הפוטנציאלית הכובדית של מטען הבוחן על פי עיקרון הסופרפוזיציה. כלומר- לחשב את תרומת האנרגיה של כל מטען יוצר ולחבר סקלרית את תרומות האנרגיה.
- נבחר את נקודת הייחוס לאנרגיה פוטנציאלית כובדית במרחק אינסופי מכל מטעני הגרביטציה היוצרים. בחירה זו נוחה ואינה מעניקה עדיפות למטען גרביטציה יוצר כלשהו (אובייקטיביות).



$$U_G = - \sum_i \frac{GM_i m}{r_i}$$

בדוגמא המאויירת :

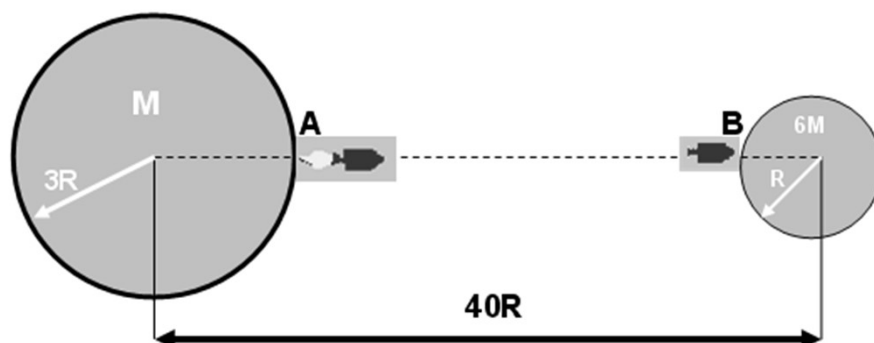
$$U_G = - \frac{GM_1 m}{r_1} - \frac{GM_2 m}{r_2} - \frac{GM_3 m}{r_3}$$

אנרגיה פוטנציאלית כבדית-עיקרון הסופרפוזיציה דוגמא (4)

דוגמא 4

מרכזיהם של שני כוכבים כדוריים נמצאים במרחק $40R$ זה מזה. מסת אחד הכוכבים היא M ורדיוסו $3R$, מסת הכוכב השני היא $6M$ ורדיוסו R , מסת הטיל היא m .

נתונים: G , R , M , m



א. באיזה מרחק מהכוכב שמסתו M (על קו ישר שבין מרכזי שני הכוכבים) תהיה עוצמת שדה הכבידה אפס?

ב. מהי המהירות ההתחלתית המינימאלית שיש להעניק לטיל הנשלח מנקודה A על הכוכב הראשון, כדי שיוכל להגיע אל הכוכב השני?

ג. באיזו מהירות יפגע הטיל בנקודה B הנמצאת על הכוכב השני? (בתנאי המהירות המינימאלית מסעיף ב').

ד. מהי העבודה החיצונית שיש להשקיע בכדי לגרום לטיל לנחות נחיתה רכה (במהירות אפס) על הכוכב השני?

פתרון דוגמא 4

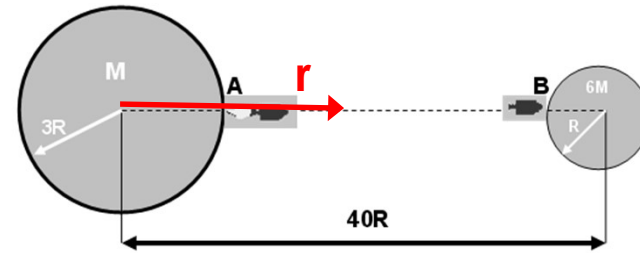
א. המרחק ממרכז הכוכב שמסתו M (על קו ישר שבין מרכזי שני הכוכבים) בו תהיה עוצמת שדה

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow \frac{GM}{r^2} - \frac{G6M}{(40R - r)^2} = 0 \Rightarrow \frac{GM}{r^2} = \frac{G6M}{(40R - r)^2}$$

$$\frac{(40R - r)^2}{r^2} = \frac{G6M}{GM}$$

$$\frac{40R - r}{r} = \sqrt{6} \Rightarrow 40R - r = r\sqrt{6} \Rightarrow 40R = r(\sqrt{6} + 1) \Rightarrow r = \frac{40R}{\sqrt{6} + 1} \approx 11.6R$$

הכבידה



ב. כדי שהטיל יגיע אל הכוכב השני, עליו להגיע אל הנקודה בה שדה הגרביטציה מתאפס במהירות כלשהי,

אפילו אפסית (אך לא אפס). משם הוא כבר ימשך אל הכוכב השני. שימור אנרגיה מכנית מ A ל r :

$$\frac{mv_A^2}{2} - \frac{GMm}{3R} - \frac{G6Mm}{40R - 3R} \geq -\frac{GMm}{11.6R} - \frac{G6Mm}{40R - 11.6R} \Rightarrow v_A \geq 0.629 \sqrt{\frac{GM}{R}} \Rightarrow v_{A,min} = 0.629 \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

ג. המהירות בה יפגע הטיל בנקודה B הנמצאת על הכוכב השני: (שימור אנרגיה מכנית מ r ל B) :

$$\frac{mv_B^2}{2} - \frac{GMm}{39R} - \frac{G6Mm}{R} = -\frac{GMm}{11.59R} - \frac{G6Mm}{40R - 11.6R} \Rightarrow v_B = 3.38 \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

ד. העבודה החיצונית שיש להשקיע בכדי לגרום לטיל לנחות נחיתה רכה (במהירות אפס) על הכוכב השני:

$$W_{EXTERNAL} = -\frac{GMm}{39R} - \frac{G6Mm}{R} - \left[-\frac{GMm}{11.59R} - \frac{G6Mm}{40R - 11.6R} \right] = -5.728 \frac{GMm}{R}$$

או :

$$W_{EXTERNAL} = -\Delta E_K = -(E_{K,B} - \underbrace{E_{K,r}}_0) = -\frac{1}{2}mv^2 = -\frac{1}{2}m \cdot \left(3.38 \sqrt{\frac{GM}{R}} \right)^2 = -5.728 \frac{GMm}{R}$$

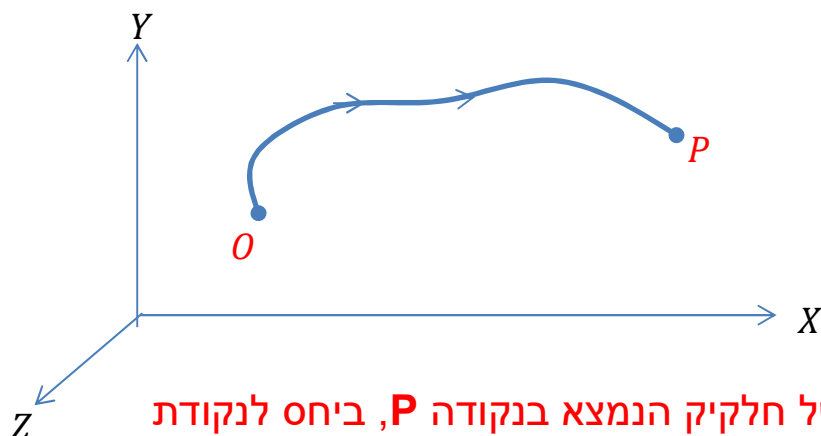
סיכום השיעור (1)

◀ כוח משמר

1. הגדרה: כוח יקרא משמר אם ורק אם עבודתו לאורך כל מסלול סגור היא תמיד אפס.
2. תוצאה: כוח יקרא משמר אם ורק אם עבודתו לאורך כל מסלול פתוח מנקודה A אל נקודה B היא תמיד ערך קבוע שאינו תלוי בצורת המסלול.
3. מסקנה: עבודתו של כוח משמר הפועל על חלקיק הנע מנקודה A אל נקודה B במרחב, תלויה, עד כדי קבוע, רק במיקומן במרחב של הנקודות A ו B.
4. לכל כוח משמר ניתן "להצמיד" אנרגיה פוטנציאלית.

◀ אנרגיה פוטנציאלית

הגדרה (1)



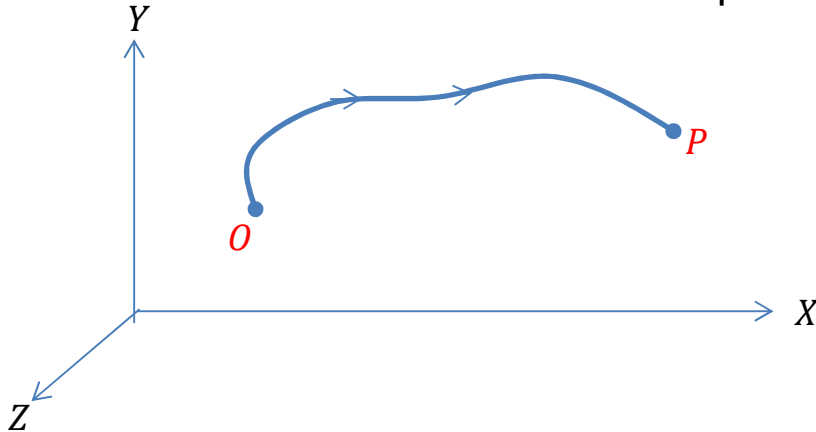
$$U_{P/O} \equiv -W_{\vec{F}_{con} O \rightarrow P}$$

- האנרגיה הפוטנציאלית עבור הכוח המשמר $\vec{F}_{con}$ של חלקיק הנמצא בנקודה P, ביחס לנקודת הייחוס O, מוגדרת כמינוס עבודת הכוח המשמר הפועל על החלקיק, כאשר החלקיק עובר מנקודת הייחוס O אל הנקודה P.

סיכום השיעור (2)

◀ **תהליך קוויזיסטטי :** העברה איטית מאד של חלקיק מנקודה לנקודה.

◀ **אנרגיה פוטנציאלית**
הגדרה (2)



$$U_{P/O} \equiv +W_{\vec{F}_{ext} O \rightarrow P}$$

– האנרגיה הפוטנציאלית עבור הכוח המשמר $\vec{F}_{con}$ של חלקיק הנמצא בנקודה **P**, ביחס לנקודת הייחוס **O**, מוגדרת גם כעבודת הכוח החיצוני הפועל על החלקיק, ושומר על קוויזיסטיות, כאשר החלקיק עובר מנקודת הייחוס **O** אל הנקודה **P**.

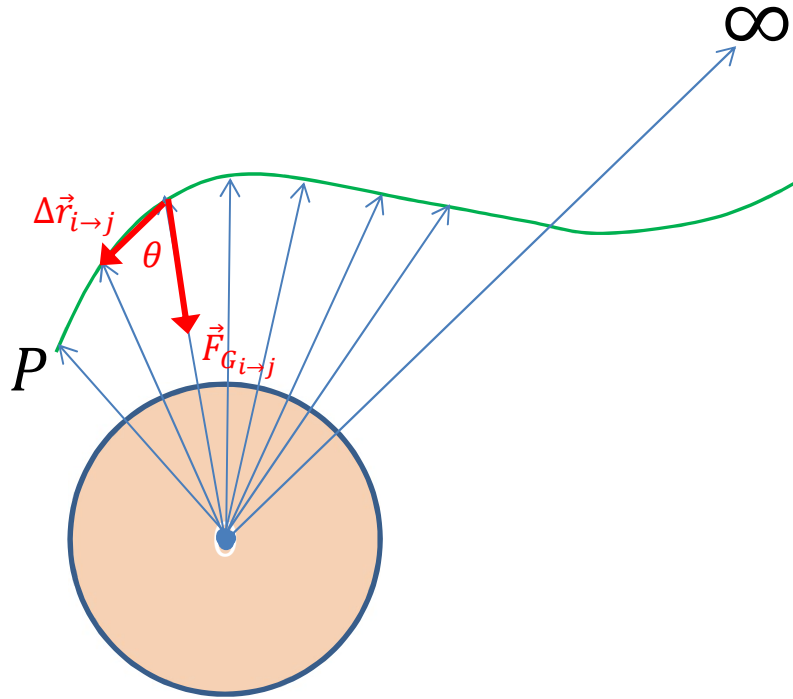
– **אנרגיה פוטנציאלית - סיכום שתי ההגדרות:**

$$U_{P/O} \equiv -W_{\vec{F}_{con} O \rightarrow P}$$

or: $+W_{\vec{F}_{ext} O \rightarrow P}$ (בתהליך קוויזיסטטי)

סיכום השיעור (3)

◀ אנרגיה פוטנציאלית כבדית (מקרה פרטי):



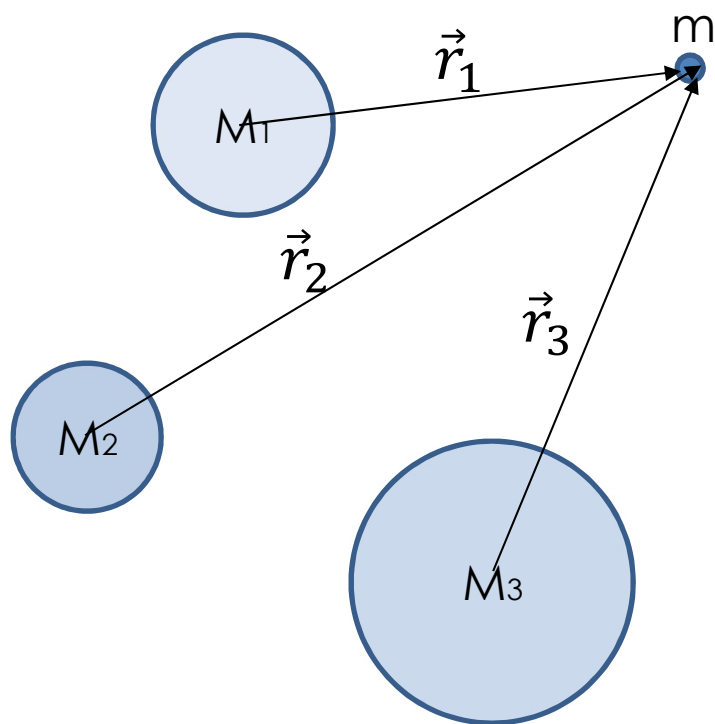
$$U_{GP/\infty} = -\frac{GMm}{r}$$

– הנוסחא נובעת מההגדרה:

$$U_{P/O} \equiv -W_{\vec{F}_{con_{O \rightarrow P}}}$$

סיכום השיעור (4)

◀ עקרון הסופרפוזיציה עבור אנרגיה פוטנציאלית גרביטציונית:



$$U_G = - \sum_i \frac{G M_i m}{r_i}$$