

מכניקה

שיקולים אנרגטיים בגרביטציה

חלק ב'



◀ אנרגיה פוטנציאלית של מערך חלקיקים.

- דוגמת המחשה.
- בניית מערכת חלקיקים-הגדרת האנרגיה הפוטנציאלית של מערכת חלקיקים.
- מקרה פרטי-אנרגיה פוטנציאלית כבדית של מערך 3 חלקיקים.
- הכללה- אנרגיה פוטנציאלית כבדית של מערך n חלקיקים.

◀ אנרגיה מכנית כוללת של מערכת סגורה בת n חלקיקים

- תכונות כלליות
- מקרה פרטי-אנרגיה כוללת של לווין המסתובב סביב כוכב.
- הכללה-אנרגיה מכנית כוללת של מערכת חלקיקים המסתובבים סביב מרכז המסה של המערכת.

◀ אנרגית קשר של מערכת חלקיקים סגורה.

אנרגיה פוטנציאלית כבדית של מערך חלקיקים-המחשה

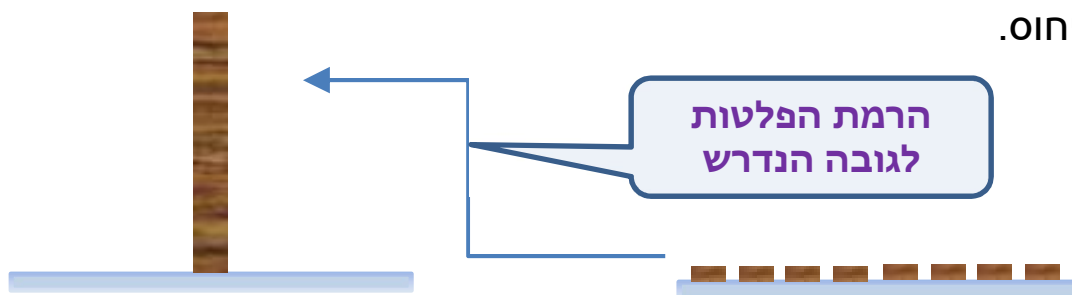
◀ הצגת בעיה להמחשה:

נחזור לרגע לפרק העבודה והאנרגיה (שם האנרגיה הפוטנציאלית של חלקיק m הנמצא בגובה h מעל

מישור יחוס היא mgh) ונציג את הבעיה הבאה:

עמוד הומוגני שגובהו H ומסתו M , מתנשא מעל קרקע אופקית. חשבו את האנרגיה הפוטנציאלית של

העמוד, ביחס לקרקע כמישור יחוס.



◀ בעצם, עלינו לחשב את העבודה החיצונית שעלינו להשקיע על מנת לבנות את העמוד.

במצב התחלתי ניתן להתייחס לעמוד כאל אוסף פלטות צרות מאד השטוחות על מישור היחוס. עלינו להרים

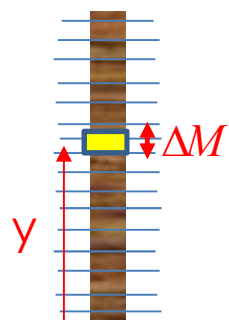
(בתהליך קוויזיסטטי) כל פלטה לגובה h היא צריכה להיות ממוקמת על פני העמוד. כל הרמת פלטה כזו

כרוכה בעבודה חלקית הגורמת לשינוי באנרגיה הפוטנציאלית של הפלטה. עלינו, לפיכך לסכום את כל

השינויים באנרגיות הפוטנציאליות של הפלטות.

אנרגיה פוטנציאלית כבדית של מערך חלקיקים

פתרון: ◀



הבעיה היא שכל אלמנט מסה של העמוד מצוי בגובה אחר ממשנהו.
לכן נוכל לחלק את העמוד לאלמנטים שווים קטנים מאד (דיפרנציאליים), על פי גובהם.

נבחר אלמנט מייצג שמסתו ΔM הנמצא במיקום y ממישור היחוס .

האנרגיה הפוטנציאלית החלקית שלו היא: $\Delta U = (\Delta m) gy$. אלמנט מייצג כזה

צבוע בצהוב.

נסכום את כל תרומות האנרגיה החלקיות:

$$U = \sum_i \Delta U_i = \sum_i \Delta m \cdot g \cdot y_i = \Delta m \cdot g \cdot \sum_i y_i = \underbrace{(\Delta m \cdot n)}_M \cdot g \cdot \frac{H}{2} = Mg \frac{H}{2}$$

$\frac{(y_1 + y_n)}{1 \ 4 \ 2 \ 43} = \frac{(0+H)}{2} = \frac{H}{2}$

סכום סדרה חשבונית

החישוב הטכני הוא החלק הפחות חשוב. חשיבות רבה יש לשייך לעובדה שבעצם חישבנו כאן

את העבודה החיצונית שעלינו להשקיע על מנת לבנות את מערך החלקיקים הנמצאים

בגבהים שונים (העמוד כולו). כך צריך להתייחס לאנרגיה פוטנציאלית של מערכת חלקיקים.

אנרגיה פוטנציאלית כובדית של מערך חלקיקים-הגדרה

חישוב האנרגיה הפוטנציאלית הכובדית הכללית של מערכת חלקיקים המפולגת במרחב.

◀ למעשה עלינו לחשב את **עבודת בניית המערכת**, בתהליך קוואזיסטטי, ממצב בו כל החלקיקים נמצאים

במרחק אינסופי זה מזה. **כך מוגדרת האנרגיה הפוטנציאלית הכובדית של מערך החלקיקים.**

◀ אפשר לבנות את המערכת באופנים רבים :

1. נסיע באיטיות רבה חלקיק אחר חלקיק מאינסוף אל מקומו.

2. נסיע באיטיות רבה חלק מהחלקיקים בבת אחת ואח"כ נסיע את יתר החלקיקים.

3. נסיע באיטיות רבה את כל החלקיקים בבת אחת.

וכו'...

התוצאה תהיה זהה.

קל לחשב את עבודת בניית המערכת באופן בו נסיע באיטיות רבה חלקיק אחר

חלקיק מאינסוף אל מקומו. נחשב עבודה זו בשקופית הבאה.

אנרגיה פוטנציאלית כבדית של מערך 3 חלקיקים

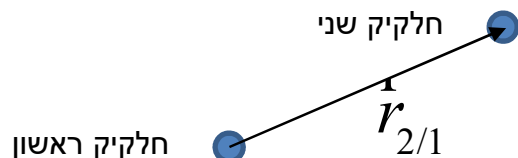
בתחילה נמצאים כל החלקיקים במרחק אינסופי זה מזה.

שלב א'- נסיע באיטיות רבה את חלקיק מספר 1 מאינסוף אל מקומו. נסמן עבודה זו ב W_1 . עבודה זו שווה לאפס שכן המרחב ריק ואין "נגד מי" לעבוד.

● חלקיק ראשון

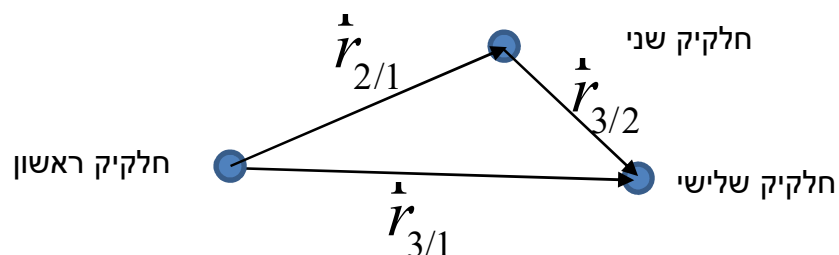
$$W_1 = 0$$

שלב ב'- נסיע באיטיות רבה את חלקיק מספר 2 מאינסוף אל מקומו. נסמן עבודה זו ב W_2 .



$$W_2 = -\frac{Gm_1m_2}{r_{2/1}}$$

שלב ג'- נסיע באיטיות רבה את חלקיק מספר 2 מאינסוף אל מקומו. נסמן עבודה זו ב W_3 .



$$W_3 = -\frac{Gm_3m_1}{r_{3/1}} - \frac{Gm_3m_2}{r_{3/2}}$$

וכך הלאה...

$$W_T = W_1 + W_2 + W_3 = -\frac{Gm_2m_1}{r_{2/1}} - \frac{Gm_3m_1}{r_{3/1}} - \frac{Gm_3m_2}{r_{3/2}}$$

כעת נסכום את העבודות:

הכללה-אנרגיה פוטנציאלית כבדית של מערך n חלקיקים

◀ עבור n חלקיקים - זוהי הכללה של התוצאה שקיבלנו.

$$W_T = W_1 + W_2 + W_3 + \dots + W_n = - \left[\frac{Gm_2m_1}{r_{2/1}} + \frac{Gm_3m_1}{r_{3/1}} + \frac{Gm_3m_2}{r_{3/2}} + K \right]$$

◀ ובכיתוב מקוצר:

$$W_T = \sum W_i = - \sum \frac{Gm_i m_j}{r_{ij}} \quad (\text{לכל } i, j \text{ השונים זה מזה})$$

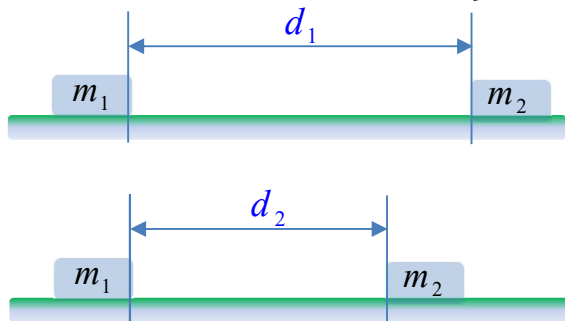
◀ מספר האיברים בנוסחא הוא $\frac{n(n-1)}{2}$. הוכיחו זאת.

אנרגיה פוטנציאלית כבדית של מערך חלקיקים - דוגמאות (1)

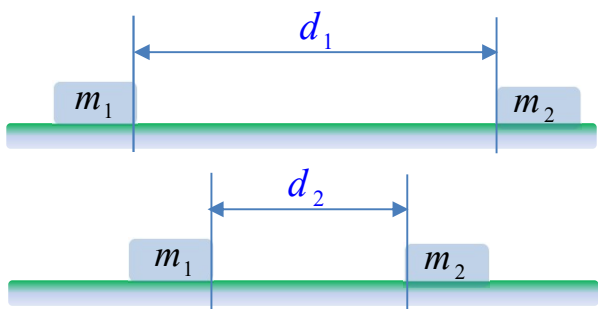
דוגמא 1- שיקולים אנרגטיים במערכת של שני חלקיקים.

שני חלקיקים m_1 ו m_2 מונחים על שולחן אופקי וחלק כשהמרחק ביניהם הוא d_1 . נציג כאן שני מקרים אליהם יש להתייחס באופן שונה כאשר שוקלים שיקולי שימור אנרגיה. בשני המקרים החלקיקים נמשכים זה לזה בגין כוחות הגרביטציה ההדדיים שהם מפעילים זה על זה.

1. מקרה 1-חלקיק m_1 דבוק לשולחן ואינו יכול לזוז. את m_2 משחררים לתנועה ספונטאנית. מה תהיה מהירותו של m_2 כאשר יגיע למרחק d_2 מ m_1 ?



2. מקרה 2-שני החלקיקים יכולים לנוע באופן ספונטאני. מה תהיה מהירותו של כל אחד מהם כאשר המרחק ביניהם יהיה d_2 ?



אנרגיה פוטנציאלית כבדית של מערך n חלקיקים -דוגמאות (2)

בשקופית הבאה נפתור בעיה זו.

אך עלינו להבהיר את **ההבדל העקרוני ביניהם:**

במקרה 1- חל שימור אנרגיה על m_2 משום שכח הגרביטציה שהפעילה עליה m_1 הוא **מרכזי** ולכן הוא **משמר**.

מאידך- לא חל שימור תנע קווי על m_2 מאחר ופועל עליה כוח חיצוני $\vec{F}_{1/2}$.

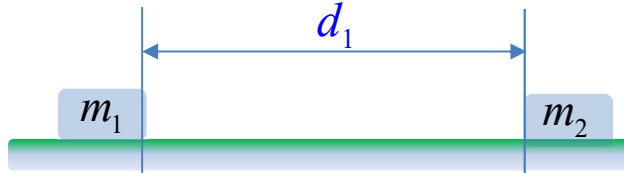
במקרה 2- אין שימור אנרגיה על שום חלקיק משום שהחלקיק האחר, יוצר כח הגרביטציה, נע והכוח שהוא יוצר-כבר אינו מרכזי ולכן אינו משמר.

עם זאת יש שימור אנרגיה על מערכת שני החלקיקים גם יחד. ובנוסף מתקיים **שימור תנע קווי** על מערכת שני החלקיקים משום שכוחות הכבידה ההדדיים שהם מפעילים זה על זה הם פנימיים.

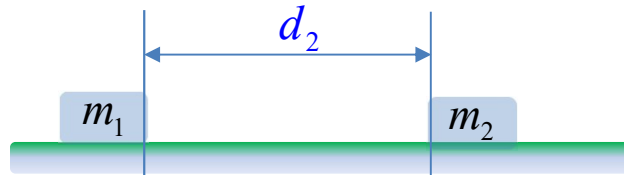
אנרגיה פוטנציאלית כבדית של מערך ח חלקיקים -דוגמאות (3)

פתרון דוגמא 1-שיקולים אנרגטיים במערכת של שני חלקיקים.

פתרון מקרה 1: חלקיק m_1 דבוק לשולחן ואינו יכול לזוז. את m_2 משחררים לתנועה ספונטאנית. מה תהיה מהירותו של m_2 כאשר יגיע למרחק d_2 מ m_1 ?



שימור אנרגיה על m_2 :



$$E_{K2}(d_1) + U_{G2}(d_1) = E_{K2}(d_2) + U_{G2}(d_2)$$

$$0 - \frac{Gm_1m_2}{d_1} = \frac{1}{2}m_2v^2 - \frac{Gm_1m_2}{d_2}$$

$$\Rightarrow -\frac{Gm_1m_2}{d_1} = \frac{1}{2}m_2v^2 - \frac{Gm_1m_2}{d_2}$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{2Gm_1 \left(\frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_1} \right)}$$

אנרגיה פוטנציאלית כבדית של מערך ח חלקיקים -דוגמאות (4)

◀ **פתרון דוגמא 1-שיקולים אנרגטיים במערכת של שני חלקיקים.**

פתרון מקרה 2:

כאמור- כוח גרביטציה הוא מרכזי ולכן משמר רק אם מטען הגרביטציה יוצר הכוח הוא **נייח** (סטטי).

כוח כזה נקרא **גרביטוסטטי**.

אם מטען הגרביטציה יוצר הכוח **נע** (**נמצא בתנועה**), אזי כוח הגרביטציה שהוא יפעיל על מטען בוחן

גרביטציוני יהיה כוח **גרביטודינמי** והוא אינו כוח משמר (מדוע? הבהירו לעצמכם שאתם מבינים ואם

לא הצלחתם-אל תוותרו, שאלו את המורה).

◀ לכן- **אין שימור אנרגיה מכנית** לא על m_1 ולא על m_2 .

◀ אבל **יש שימור אנרגיה מכנית כוללת על כל המערכת.**

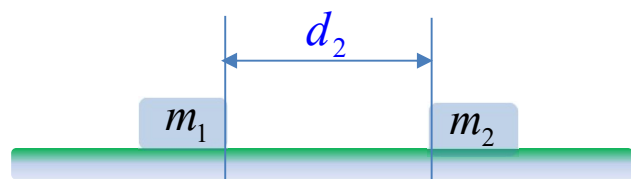
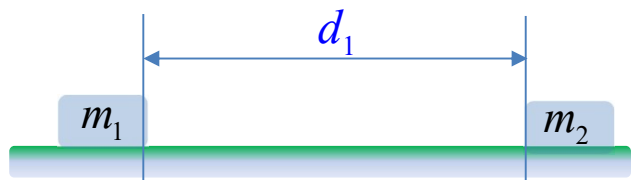
◀ **במצב זה יש לנצל את נוסחת האנרגיה הפוטנציאלית של מערכת חלקיקים.**

◀ את הפתרון-נציג בשקופית הבאה.

אנרגיה פוטנציאלית כבדית של מערך n חלקיקים - דוגמאות (5)

פתרון דוגמא 1- שיקולים אנרגטיים במערכת של שני חלקיקים.

פתרון מקרה 2: הפעם שני החלקיקים נעים. עלינו לחשב את מהירויות החלקיקים כשהמרחק ביניהם יהיה d_2 .



(1) שימור אנרגיית מערכת:

$$(1) \quad E_K(d_1) + U(d_1) = E_K(d_2) + U(d_2)$$

$$0 - \frac{Gm_1m_2}{d_1} = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 - \frac{Gm_1m_2}{d_2}$$

(2) שימור תנע קווי :

$$(2) \quad \vec{p}(d_1) = \vec{p}(d_2)$$

$$\vec{0} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$$

אלו שתי משוואות המכילות שני נעלמים ולכן-פתירות.

הפתרון המלא - בשקופית הבאה.

אנרגיה פוטנציאלית כבדית של מערך ח חלקיקים -דוגמאות (6)

פתרון דוגמא 1-שיקולים אנרגטיים במערכת של שני חלקיקים.

פתרון מקרה 2:

$$(1) -\frac{Gm_1m_2}{d_1} = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + -\frac{Gm_1m_2}{d_2}$$

$$(2) \vec{r}_O = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 \Rightarrow \vec{p}_2 = -\vec{p}_1 \Rightarrow p_2^2 = p_1^2$$

נציב ב (1)

נסמן: $P_1 = P_2 = P$

$$(3) \frac{Gm_1m_2}{d_2} - \frac{Gm_1m_2}{d_1} = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} = \frac{p^2}{2} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) = \frac{p^2}{2} \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}$$

$$(4) Gm_1m_2 \left(\frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_1} \right) = \frac{p^2}{2} \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \Rightarrow p = \sqrt{\frac{2Gm_1^2 m_2^2}{m_1 + m_2} \left(\frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_1} \right)}$$

$$(5) m_1 v_1 = m_2 v_2 = \sqrt{\frac{2Gm_1^2 m_2^2}{m_1 + m_2} \left(\frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_1} \right)} \Rightarrow \vec{v}_1 = \sqrt{\frac{2Gm_2^2}{m_1 + m_2} \left(\frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_1} \right)} \hat{x}$$

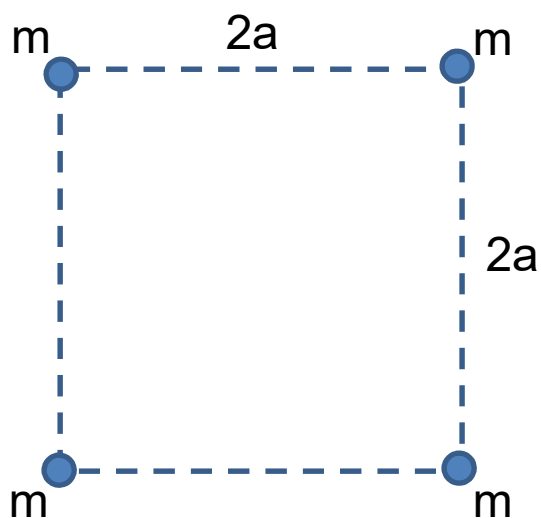
$$\vec{v}_2 = -\sqrt{\frac{2Gm_1^2}{m_1 + m_2} \left(\frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_1} \right)} \hat{x}$$

אנרגיה פוטנציאלית כבדית של מערך n חלקיקים - דוגמאות (7)

דוגמא 2

על קדקודי ריבוע שאורך כל צלע מצלעותיו הוא $2a$, מונחים ארבעה חלקיקים זהים ושווי מסה. המערכת מבודדת וסגורה (כלומר אין שום גורם חיצוני היוצר עמה אינטראקציה). משחררים את המערכת לתנועה ספונטאנית. החלקיקים מתקרבים זה לזה בשל כוח המשיכה הגרביטציוני ביניהם.

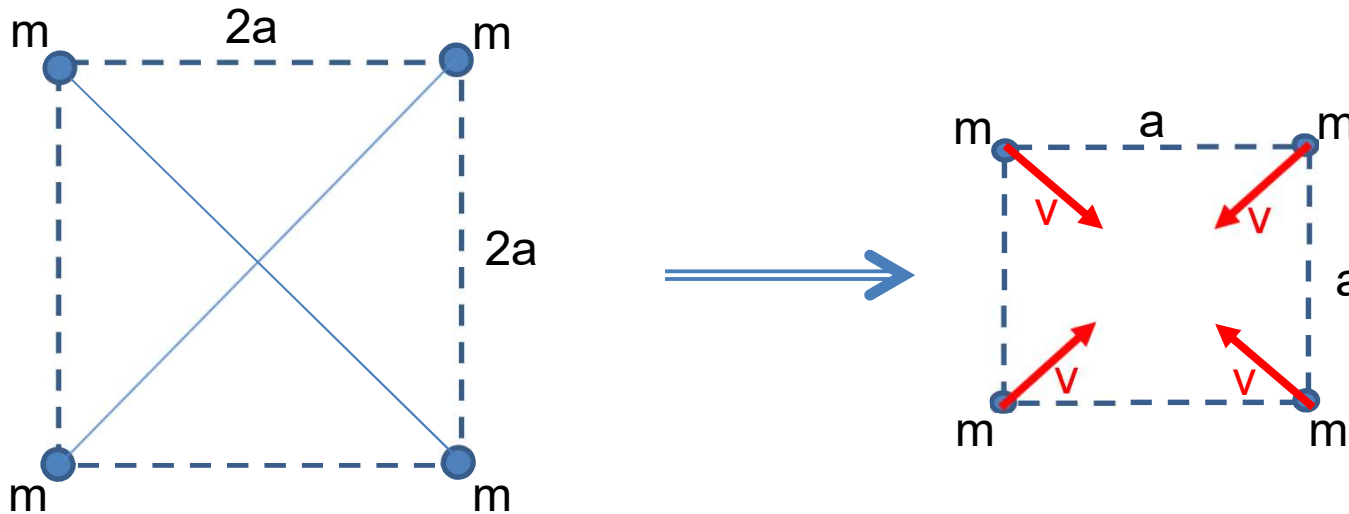
חשבו את גודל מהירותו של כל חלקיק, כאשר אורך כל צלע מצלעותיו של הריבוע תהיה a .



נתונים: a, G, m .

אנרגיה פוטנציאלית כבדית של מערך n חלקיקים - דוגמאות (8)

פתרון דוגמא 2



חל שימור אנרגיה על כל המערכת : $(1) \quad E_k(2a) + U_G(2a) = E_k(a) + U_G(a)$

בנוסחת האנרגיה הפוטנציאלית ישנם : $\frac{(n-1)n}{2} = \frac{(4-1) \cdot 4}{2} = 6$ [איברים]

כל איבר מיוצג ע"י צמד חלקיקים אשר ביניהם יש קו (מרחק) מקשר. ישנם 6 צמדים כאלה, נציב במשוואה (1):

$$(2) \quad \begin{matrix} E_k(2a) \\ 0 \end{matrix} + \begin{matrix} U_G(2a) \\ - \left[4 \frac{Gm^2}{2a} + 2 \frac{Gm^2}{2a\sqrt{2}} \right] \end{matrix} = \begin{matrix} E_k(a) \\ 4 \cdot \frac{1}{2} mv^2 \end{matrix} + \begin{matrix} U_G(a) \\ - \left[4 \frac{Gm^2}{a} + 2 \frac{Gm^2}{a\sqrt{2}} \right] \end{matrix}$$

◀ המשך...

$$(2) \quad E_k(2a) + U_G(2a) = E_k(a) + U_G(a)$$

$$0 - \left[4 \frac{Gm^2}{2a} + 2 \frac{Gm^2}{2a\sqrt{2}} \right] = 4 \cdot \frac{1}{2} mv^2 - \left[4 \frac{Gm^2}{a} + 2 \frac{Gm^2}{a\sqrt{2}} \right]$$

$$(3) \quad - \left[4 \frac{Gm^2}{2a} + 2 \frac{Gm^2}{2a\sqrt{2}} \right] = 4 \cdot \frac{1}{2} mv^2 - \left[4 \frac{Gm^2}{a} + 2 \frac{Gm^2}{a\sqrt{2}} \right]$$

$$(4) \quad v^2 = \left[2 \frac{Gm}{a} + \frac{Gm}{a\sqrt{2}} \right] - \left[2 \frac{Gm}{2a} + \frac{Gm}{2a\sqrt{2}} \right]$$

$$(5) \quad v = \sqrt{\frac{Gm}{a} \left[1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} \right]}$$

אנרגיה מכנית כוללת של מערכת חלקיקים סגורה

- ◀ **מערכת חלקיקים סגורה** היא מערכת חלקיקים, אשר אם מתקיימות בה אינטראקציות, הן פנימיות בלבד, בין חלקיקי המערכת, אין אינטראקציות בין חלקיקי המערכת לבין העולם החיצוני.
- ◀ אין התערבות חיצונית ולכן המערכת **משמרת תנע קווי**.
- ◀ אם אין תהליכים כגון התנגשויות לא אלסטיות או התפוצצויות, נשמרת גם האנרגיה המכנית הכוללת.
- ◀ אם החלקיקים נעים-**הם נעים סביב מרכז המסה של המערכת**.
- ◀ **האנרגיה המכנית** (קינטית+פוטנציאלית כבדית) של מערכת חלקיקים סגורה **מוגדרת** כעבודת בניית המערכת ממצב בו כל החלקיקים נמצאים במרחק אינסופי זה מזה- עד המצב בו החלקיקים מסתובבים סביב מרכז המסה המשותף שלהם.
- ◀ **אנרגית קשר של מערכת חלקיקים מוגדרת** כאנרגיה שהשתחררה מהמערכת תוך כדי יצירתה. כלומר מינוס עבודת הבניה שלה. במקרים רבים מסמנים אותה באות B (Binding Energy).

$$B = - \left(\begin{array}{c} \text{עבודת בניית} \\ \text{המערכת} \end{array} \right) \quad \text{כלומר :}$$

דוגמאות:

1. https://he.wikipedia.org/wiki/%D7%9E%D7%A8%D7%9B%D7%96_%D7%9E%D7%A1%D7%94#/media/File:Orbit3.gif

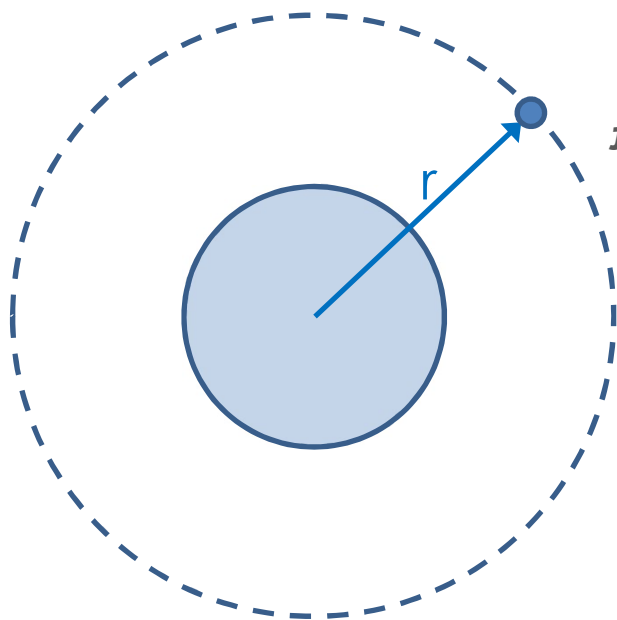
2. https://he.wikipedia.org/wiki/%D7%9E%D7%9B%D7%A0%D7%99%D7%A7%D7%94_%D7%A9%D7%9C_%D7%92%D7%95%D7%A3_%D7%A7%D7%A9%D7%99%D7%97#/media/File:Gyroscope_operation.gif

3. https://he.wikipedia.org/wiki/%D7%91%D7%A2%D7%99%D7%94_%D7%93%D7%95-%D7%92%D7%95%D7%A4%D7%99%D7%AA#/media/File:Orbit5.gif

אנרגיה מכנית כוללת של מערכת חלקיקים סגורה-מקרה פרטי (1)

1. מקרה פרטי-לווין מסתובב סביב כוכב

- ◀ לווין וכוכב, יכולים להסתובב זה סביב זה, באופן ששניהם מסתובבים סביב מרכז המסה המשותף שלהם.
- ◀ מכיוון שהכוכב בעל מסה גדולה בהרבה ממסת הלווין, ניתן להניח, בקירוב טוב מאוד, שמרכז המסה המשותף שלהם נמצא במרכז הכוכב, כך שמעשית הלווין מסתובב סביב הכוכב והכוכב נמצא (כמעט) במנוחה.
- ◀ לשם נוחות - נבחן תנועה מעגלית של הלווין סביב הכוכב.



- ◀ בשקופית הבאה נחשב את האנרגיה המכנית-קינטית + פוטנציאלית של הלווין.

אנרגיה מכנית כוללת של מערכת חלקיקים סגורה-מקרה פרטי (2)

החישוב:

◀ האנרגיה המכנית הכוללת של הלוויין:

$$(1) \quad E_T = \underbrace{E_K}_{\frac{1}{2}mv^2} + \underbrace{U_G}_{-\frac{GMm}{r}} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r}$$

◀ חוק שני של ניוטון:

$$(2) \quad |\vec{F}_G| = m|\vec{a}| \Rightarrow \frac{GMm}{r^2} = m \frac{v^2}{r} \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = \frac{GMm}{2r}$$

◀ נציב במשוואה (1) ונקבל:

$$(3) \quad E_T = \frac{GMm}{2r} - \frac{GMm}{r} = -\frac{GMm}{2r}$$

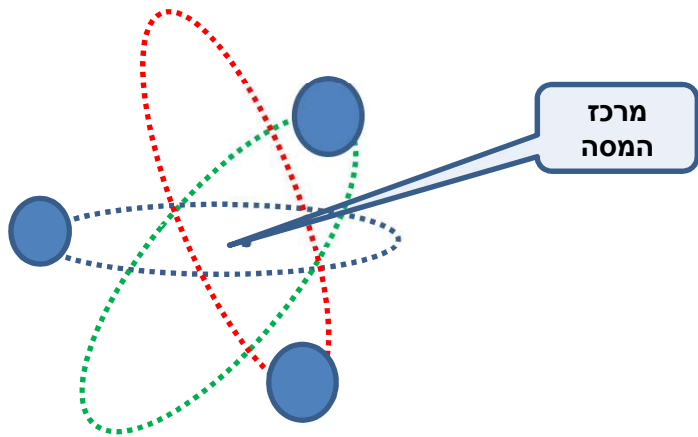
האנרגיה המכנית הכוללת של הלוויין
היא שלילית ושווה למחצית האנרגיה
הפוטנציאלית שלו

$$(4) \quad E_T = -\frac{GMm}{2r} = \frac{1}{2}U_G$$

הכללה-אנרגיה מכנית כוללת של מערכת חלקיקים סגורה

2. הכללה-מערכת חלקיקים המסתובב סביב מרכז המסה שלו:

נוכל כעת להכליל את התוצאה שקיבלנו-לפיה האנרגיה המכנית הכוללת של המערכת שווה למחצית האנרגיה הפוטנציאלית שלה, עבור כל מערכת חלקיקים המסתובב באופן ספונטאני סביב מרכז המסה של המערכת:



$$(4) \quad E_T = - \sum_{i \neq j} \frac{G m_i m_j}{2 r_{i,j}} = \frac{1}{2} U_G$$

תמיד:

ואין זה משנה מכמה חלקיקים בנויה המערכת ומהי צורת מסלוליהם.

אנרגית הקשר (B) של המערכת מוגדרת, כאמור, כאנרגיה שהשתחררה תוך כדי יצירת המערכת:

$$B = - \left(\text{עבודת בניית המערכת} \right) = -E_T = - \left(\frac{1}{2} U_G \right) = + \sum_{i \neq j} \frac{G m_i m_j}{2 r_{i,j}}$$

אנרגיה מכנית כוללת של מערכת חלקיקים סגורה

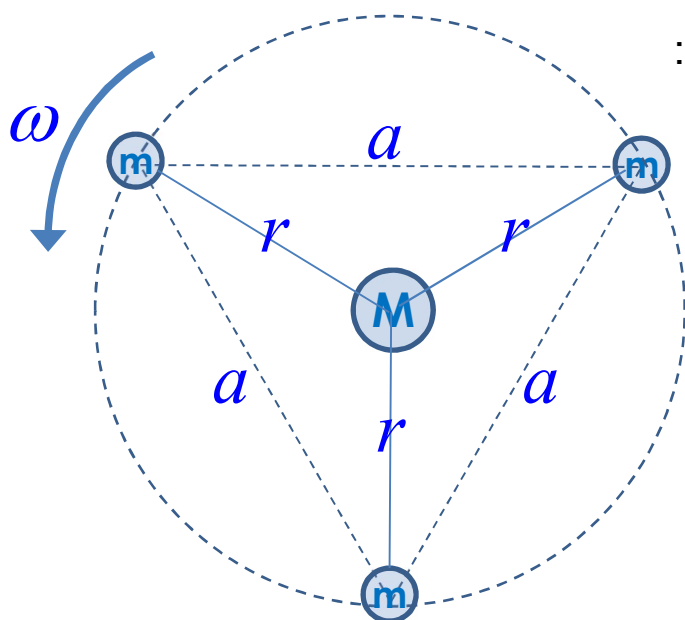
דוגמא 3

שלושה חלקיקים שווי מסה m , נמצאים במבנה של משולש שווה צלעות שאורך צלעו הוא a .
החלקיקים מסתובבים סביב חלקיק שמסתו M הנמצא במרכז המשולש בהשפעת כוחות הכבידה ההדדיים בלבד.

נתונים: a, m, M, G

א. חשבו את האנרגיה המכנית הכוללת של המערכת.

ב. חשבו את גודל מהירותו של חלקיק מסתובב כלשהו בשני אופנים:



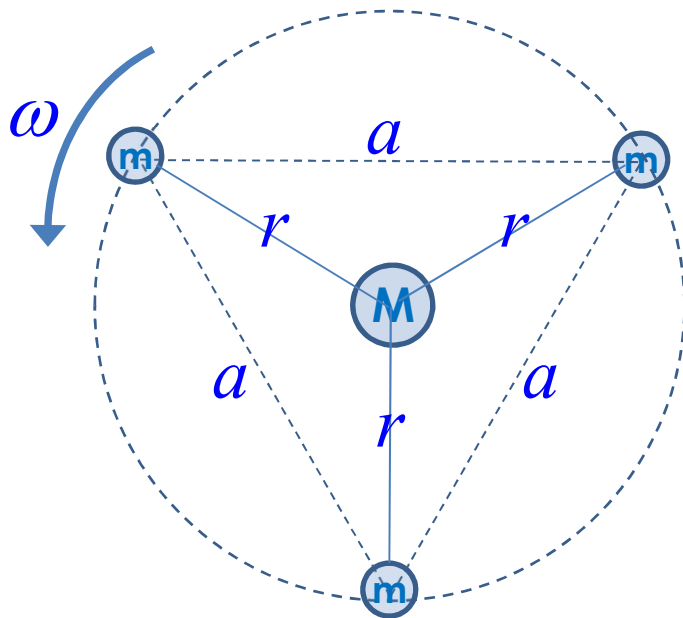
$$1. \text{ על פי } E_T = \frac{1}{2} U_G$$

2. על פי חוק שני של ניוטון.

אנרגיה מכנית כוללת של מערכת חלקיקים סגורה

פתרון סעיף א':

$$(1) E_T = \frac{1}{2} U_G = \frac{1}{2} \left[3 \cdot \left(-\frac{GMm}{r} \right) + 3 \left(-\frac{Gm^2}{a} \right) \right] = -\frac{3}{2} Gm \left(\frac{M}{r} + \frac{m}{a} \right)$$



$$\frac{a}{2} = r \cos 30^\circ \Rightarrow r = \frac{a}{2 \cdot \cos 30^\circ} = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

נציב במשוואה (1):

$$(2) E_T = -\frac{3}{2} Gm \left(\frac{M}{r} + \frac{m}{a} \right) = -\frac{3Gm}{2} \left(\frac{M}{a/\sqrt{3}} + \frac{m}{a} \right) = -\frac{3Gm}{2a} (\sqrt{3}M + m)$$

אנרגיה מכנית כוללת של מערכת חלקיקים סגורה

◀ פתרון סעיף ב' 1: חישוב גודל מהירותו של חלקיק באמצעות שיקולים אנרגטיים בלבד.

$$(1) E_T = U_G + E_K$$

$$(2) E_T = \frac{1}{2} U_G \Rightarrow U_G = 2E_T$$

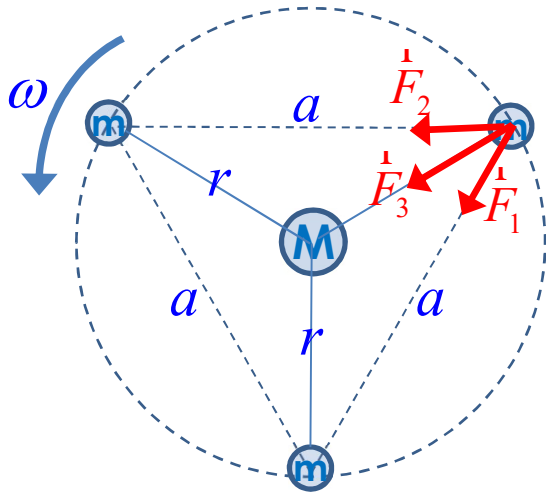
$$(3) E_T = 2E_T + E_K$$

$$(4) \underbrace{E_K}_{3 \cdot \frac{1}{2}mv^2} = - \underbrace{E_T}_{-\frac{3Gm}{2a}(\sqrt{3}M+m)} \Rightarrow 3 \cdot \frac{1}{2}mv^2 = \frac{3Gm}{2a}(\sqrt{3}M+m)$$

$$(5) v = \sqrt{\frac{G}{a}(\sqrt{3}M+m)}$$

אנרגיה מכנית כוללת של מערכת חלקיקים סגורה

פתרון סעיף ב' 2: חישוב גודל מהירותו של חלקיק באמצעות חוק שני של ניוטון



ניעזר בחוק שני של ניוטון כאשר הוא מופעל על אחד החלקיקים המסתובבים:

$$(1) \sum \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \sum F_c = ma_c \Rightarrow \sum F_c = m \frac{v^2}{r}$$

$$(2) \left| \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 \right| = \frac{mv^2}{r} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} \vec{F}_1 = \vec{F}_2 = F \\ 2F \cos 30^\circ + F_3 = \frac{mv^2}{r} \end{matrix}$$

$$(3) \quad 2 \frac{Gm^2}{a^2} \cos 30^\circ + \frac{GMm}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$$

$$(4) \quad v = \frac{Gm}{a} + \frac{GM\sqrt{3}}{a}$$

$$(5) \quad v = \sqrt{\frac{G}{a} (\sqrt{3}M + m)}$$

סיכום השעור (1)

◀ אנרגיה פוטנציאלית. כבדית של מערך המורכב מ n חלקיקים (אנרגיה פוטנציאלית של המערכת)

זוהי העבודה החיצונית שיש לבצע על מנת לבנות את המערכת :

איברים
בנוסחא $\frac{n(n-1)}{2}$

$$W_T = \sum W_i = - \sum \frac{Gm_i m_j}{r_{ij}}$$

(לכל i, j השונים זה מזה)

◀ **האנרגיה המכנית** (קינטית+פוטנציאלית כבדית) **של מערכת חלקיקים סגורה** מוגדרת כעבודת בניית המערכת ממצב בו כל החלקיקים נמצאים במרחק אינסופי זה מזה- עד המצב בו החלקיקים מסתובבים סביב מרכז המסה המשותף שלהם :

$$E_T = - \sum_{i \neq j} \frac{Gm_i m_j}{2r_{i,j}} = \frac{1}{2} U_G$$

סיכום השעור (2)

◀ אנרגית קשר של מערך חלקיקים המסתובב סביב מרכז המסה שלו :

מוגדרת כאנרגיה המשתחררת כאשר המערכת נבנית ממצב התחלתי בו כל חלקיקיה נמצאים במנוחה במרחק אינסופי זה מזה עד המצב הסופי בו מערך החלקיקים מסתובב באופן עמיד (סטציונרי , steady state) סביב מרכז המסה שלו.

$$B \equiv - \left(\begin{array}{c} \text{עבודת בניית} \\ \text{המערכת} \end{array} \right) = -E_T = - \left(\frac{1}{2} U_G \right) = + \sum_{i \neq j} \frac{G m_i m_j}{2 r_{i,j}}$$