

מכניקה

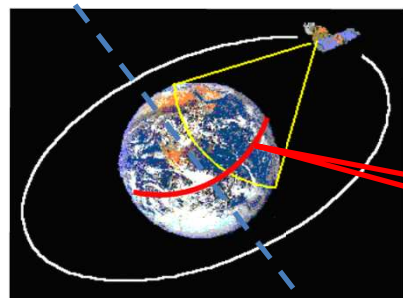
שיקולים אנרגטיים בגרביטציה

חלק ג'



- ◀ לווין גיאו-סטציונרי
- ◀ מהירות מילוט.
- ◀ תוספת למהירות משיקית של לווין לצורך מילוט.
- ◀ דוגמאות כלליות בגרביטציה.

לווין גיאוסטציונרי



התמונה נלקחה מויקיפדיה+
תוספות שלי

קו המשווה

◀ **גיאו = ge** (ביוונית: אדמה, ארץ):

– גיאוגרפיה = שרטוט פני האדמה.

– גיאודזיה = מדידת האדמה.

– גיאולוגיה = תורת הארץ-חקר קליפת כדור הארץ.

– גיאואינפורמציה = מושג המתאר אינפורמציה כללית הנוגעת למיקום על פני כדור הארץ וסביבתו.

◀ **סטציונרי** = קבוע (בזמן). **תהליך סטציונרי** = תהליך שאינו תלוי בזמן.

◀ **גיאוסטציונרי** = מיקום קבוע.

◀ **לווין גיאוסטציונרי** = לווין הנמצא במיקום קבוע מעל נקודה על קו המשווה ולכן יעיל כלווין תקשורת.
(ראו המחשה מתוך ויקיפדיה):

<https://he.wikipedia.org/wiki/%D7%A7%D7%95%D7%91%D7%A5:Geostat.gif>

<https://he.wikipedia.org/wiki/%D7%9C%D7%95%D7%95%D7%99%D7%99%D7%9F#/media/File:Geostationaryjava3D.gif>

◀ לווין גיאוסטציונרי מסתובב במסלול הנמצא במישור המשווה (ראו פרק כוחות בגרביטציה). רדיוסו הוא כ : 42,200 ק"מ (נמדד ממרכז כדור הארץ).

האנרגיה המכנית הכוללת של לוויין גיאוסטציונרי

◀ האנרגיה המכנית הכוללת (פוטנציאלית+קינטית) של לוויין כזה היא:

$$E_T = U_G + E_K = \frac{1}{2}U_G = -\frac{GMm}{2r}$$

$U_G = -\frac{GMm}{r}$ $E_K = +\frac{GMm}{2r}$

כאשר:

M - מסת כדור הארץ.

m - מסת הלוויין.

r - רדיוס הסיבוב של הלוויין (כ-42,200 ק"מ).

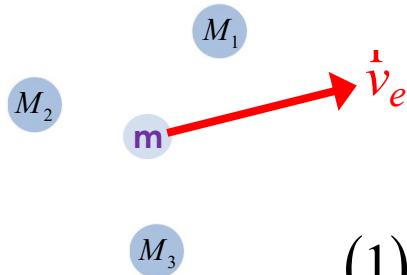
◀ כדי להמחיש מספרית (עבור לוויין שמסתו 1 טון):

$$E_T = -\frac{GMm}{2r} \approx -\frac{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24} \cdot 10^3}{2 \cdot 4.22 \cdot 10^6} = -4.74 \cdot 10^{10} [J]$$

◀ **מהירות מילוט** ($v_e = v_{escape}$) של חלקיק שהוא אחד מחלקיקי מערכת סגורה, מוגדרת

כמהירות **מינימלית** אשר צריך שתהיה לו כדי שיוכל להימלט מהמערכת, כלומר "לברוח" למרחק אינסופי מהמערכת. במצב זה החלקיק מתרחק מהמערכת כל הזמן.

◀ **אין חשיבות לכיוון מהירות המילוט.** אם החלקיק מצליח להימלט כאשר משגרים אותו לכיוון מסויים הוא יצליח להימלט גם אם ישגרו אותו לכל כיוון אחר.



◀ החישוב מבוסס על שימור אנרגיה על החלקיק, ממצבו המקורי ועד אשר החלקיק מגיע למרחק אינסופי מהמערכת ממנה הוא נמלט.

הדרישה למילוט :

$$(1) \quad E_{K,initial} + U_{G,initial} = E_{K,\infty} + U_{G,\infty}$$

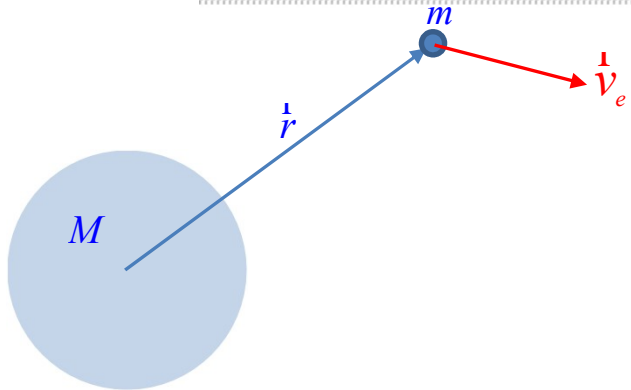
≥ 0 0

$$(2) \quad E_{K,initial} + U_{G,initial} \geq 0$$

$$(3) \quad E_{K,initial} \geq -U_{G,initial}$$

$$(4) \quad \frac{1}{2}mv^2 \geq \left[\sum \frac{GM_i}{r_i} \right] \cdot m \Rightarrow v_e = \sum_i \sqrt{\frac{2GM_i}{r_i}}$$

מהירות מילוט מכוכב יחיד-מהירות קוסמית ראשונה (1).



◀ טיל שמסתו m נמצא במרחק r ממרכז כוכב שמסתו M .

כדי לגרום למילוט הטיל מהכוכב (ללא מנוע), עלינו להקנות לו מהירות שתגרום לו להמלט מכוח המשיכה של הכוכב.

כוח המשיכה דועך ככל שמתרחקים מהכוכב אך אינו מתאפס.

לכן מילוט אפשרי רק אם הטיל ימשיך כל העת להתרחק מהכוכב.

כלומר, ישאף להגיע למרחק אינסופי מהכוכב.

כיוון המהירות, כאמור, אינו רלוונטי. הבעיה היא אנרגטית בלבד :

◀ התנאי למילוט הוא (שימור אנרגיה על הטיל מ r לאינסוף) :

$$(1) \quad E_{K,initial} + U_{G,initial} = E_{K,\infty} + U_{G,\infty}$$

≥ 0 0

$$(2) \quad E_{K,initial} + U_{G,initial} \geq 0$$

$$(3) \quad E_{K,initial} \geq -U_{G,initial}$$

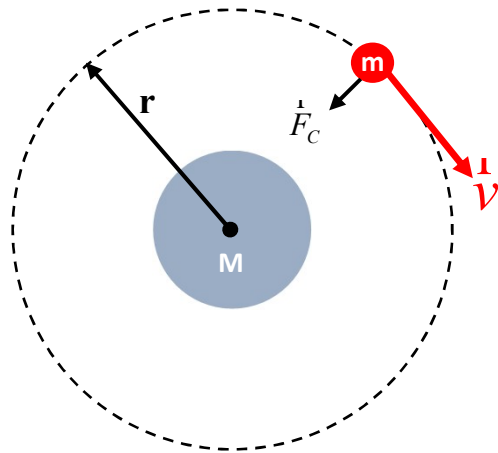
$$(4) \quad \frac{1}{2}mv^2 \geq \frac{GMm}{r} \Rightarrow v \geq \sqrt{\frac{2GM}{r}} \Rightarrow$$

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

**מהירות המילוט היא
המהירות המינימלית
הדרושה לשם מילוט**

מהירות מילוט מכוכב יחיד - מהירות קוסמית ראשונה (2).

◀ הקשר בין מהירות המילוט לבין המהירות המשיקית של טיל המסתובב



במעגל סביב כוכב:

1. המהירות המשיקית : $v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$

2. מהירות המילוט : $v_e = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$

3. לכן : $v_e = v \cdot \sqrt{2}$

◀ מהירות המילוט ממצב בו הטיל מונח על פני הכוכב :

במקרה זה : $r = R$.

לכן : $v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$ אך מאחר : $GM = g R^2$, נקבל גם : $v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{2gR}$

◀ הערה: מהירות המילוט ממערכת השמש, נקראת -מהירות קוסמית שניה.

מהירות המילוט מהגלקסיה "שלנו"-שביל החלב, נקראת מהירות קוסמית שלישית.

דוגמא (1) ◀

חור שחור הוא כוכב דחוס עד כדי כך שאפילו אור לא יכול להמלט ממנו ולכן לא ניתן לראותו.

א. חשבו את רדיוסו המקסימלי של חור שחור שמסתו היא M . (רדיוס זה נקרא: רדיוס שוורצשילד).

ב. מהי במקרה זה צפיפות מסתו המינימלית של חור שחור זה ?



מהירות מילוט- דוגמא (1)-פתרון

פתרון דוגמא 1

א. מהירות המילוט מפני הכוכב היא :
$$(1) v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

הדרישה היא שאור לא ימלט מכוכב זה לכן : $(2) \sqrt{\frac{2GM}{R}} > c$, כאשר : $c = 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$ היא מהירות האור בואקום.

מכאן: $(5) R < \frac{2GM}{c^2} \Rightarrow (4) \frac{2GM}{R} > c^2$ כלומר רדיוס שורצשילד הוא : $R = \frac{2GM}{c^2} = 1.48 \cdot 10^{-27} M$

ב. את צפיפות המסה ρ , ניתן לחשב על פי: $(6) M = \rho 4 \pi R^3$, נציב את M במשוואה (5) ונקבל :

$$(5) R < \frac{2G\rho 4\pi R^3}{c^2 3} \Rightarrow \frac{3c^2}{8\pi G R^2} < \rho$$

לדוגמא, אם רדיוסו של חור שחור הוא 100 מטר, תהיה צפיפות מסתו גבוהה יותר מ :

**כ 16 מליוני מליונים
של טון לסמ"ק !**

$$\rho_{\min} = \frac{3c^2}{8\pi G R^2} = \frac{3 \cdot (3 \cdot 10^8)^2}{8\pi 6.67 \cdot 10^{-11} 100^2} \approx 1.6 \cdot 10^{22} \frac{kg}{m^3} = 1.6 \cdot 10^{13} \frac{ton}{cm^3}$$

תוספת מהירות על מנת למלט לוויין המסתובב סביב כוכב (1)

◀ לוויין מסתובב סביב כוכב במהירות משיקית השווה ל: $v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$. מאחר ויש לו כבר מהירות, עלינו להוסיף לו "תוספת" מינימלית של מהירות: $\Delta \dot{v}$ על מנת למלט אותו.

◀ המהירות השקולה של $\dot{v}$ ו: $\Delta \dot{v}$, תהיה אז: $\dot{v}_e = \dot{v} + \Delta \dot{v}$.

◀ הדרישה למילוט תהיה לפיכך: $|\dot{v}_e| = |\dot{v} + \Delta \dot{v}|$, כלומר (ראו איור): $(\Delta v)^2 = v^2 + (v_e)^2 - 2v \cdot v_e \cdot \cos \alpha$

(עשינו כאן שימוש במשפט הקוסינוסים).

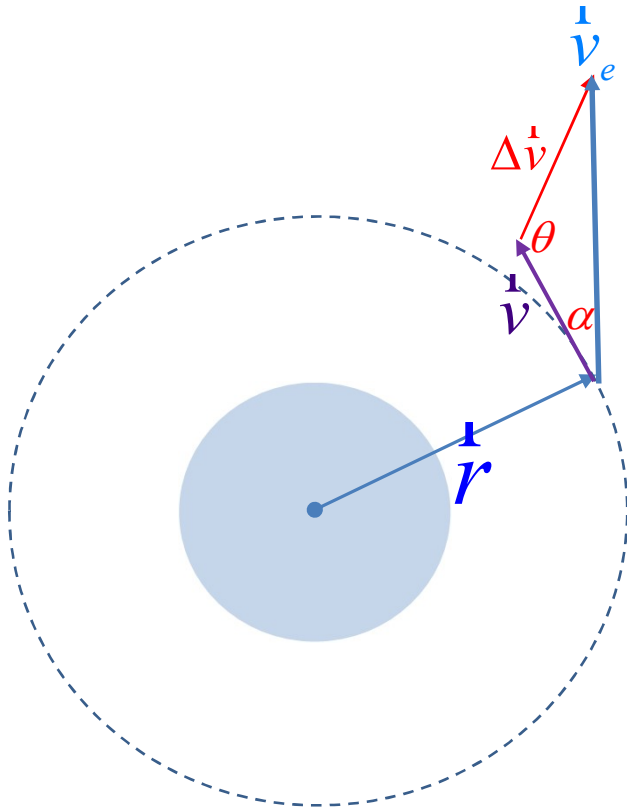
מכאן:

$$(1) \quad (\Delta v)^2 = v^2 + (v_e)^2 - 2v \cdot v_e \cdot \cos \alpha$$

$$(2) \quad (\Delta v)^2 = \underbrace{\frac{GM}{v^2}} + \underbrace{\frac{2GM}{v_e^2}} - 2 \cdot \underbrace{\sqrt{\frac{GM}{2^3}}}_v \cdot \underbrace{\sqrt{\frac{2GM}{4 \cdot 2^3}}}_{v_e} \cdot \cos \alpha$$

$$(3) \quad \Delta v = \sqrt{\frac{GM}{r} (3 - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \cos \alpha)}$$

. כלומר תוספת המהירות $\Delta \dot{v}$ תלויה בכיוונה של $\dot{v}$.



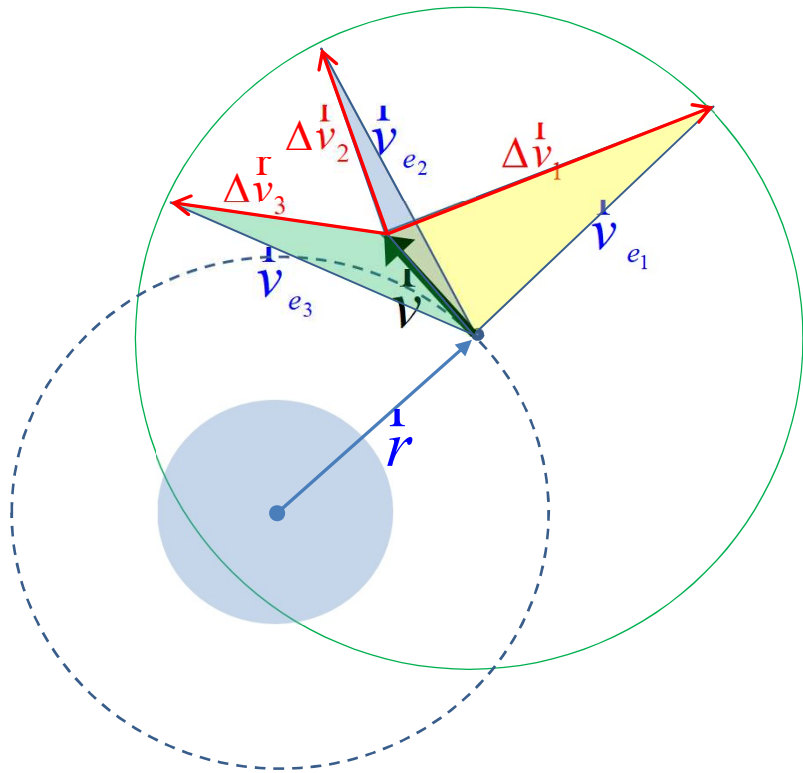
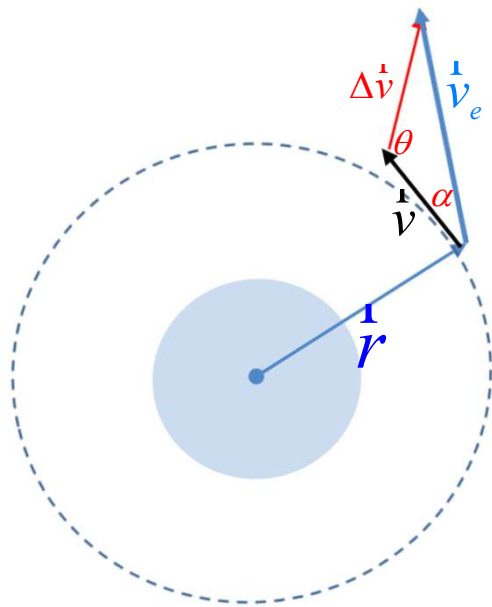
תוספת מהירות על מנת למלט לוויין המסתובב סביב כוכב (2)

באמצעות מעגל עזר שמחוגו פרופורציונלי למהירות המילוט: $v_e = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$ (המעגל הירוק), ניתן

לראות כיצד משתנה גודל התוספת Δv , שיש להעניק ללוויין, על מנת לגרום לו להימלט משדה הכובד

של הכוכב. כלומר להביאו למרחק אינסופי מהכוכב.

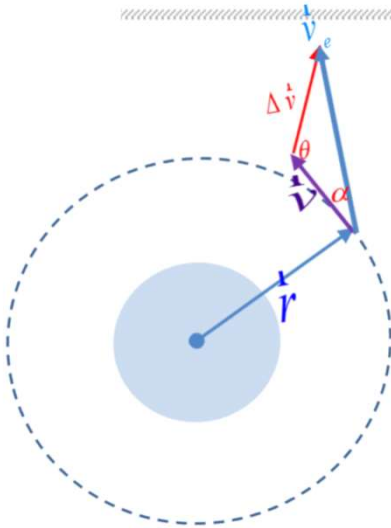
זוהי תוספת המהירות Δv למהירות המשיקית שגודלה $v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$ שהלוויין כבר נע בה סביב הכוכב.



תוספת מהירות על מנת למלט לוויין המסתובב סביב כוכב (3)

◀ הנוסחה הכללית:

$$(3) \quad \Delta v = \sqrt{\frac{GM}{r}} (3 - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \cos \alpha)$$



◀ שני מקרים פרטיים (אותם חשוב להכיר):

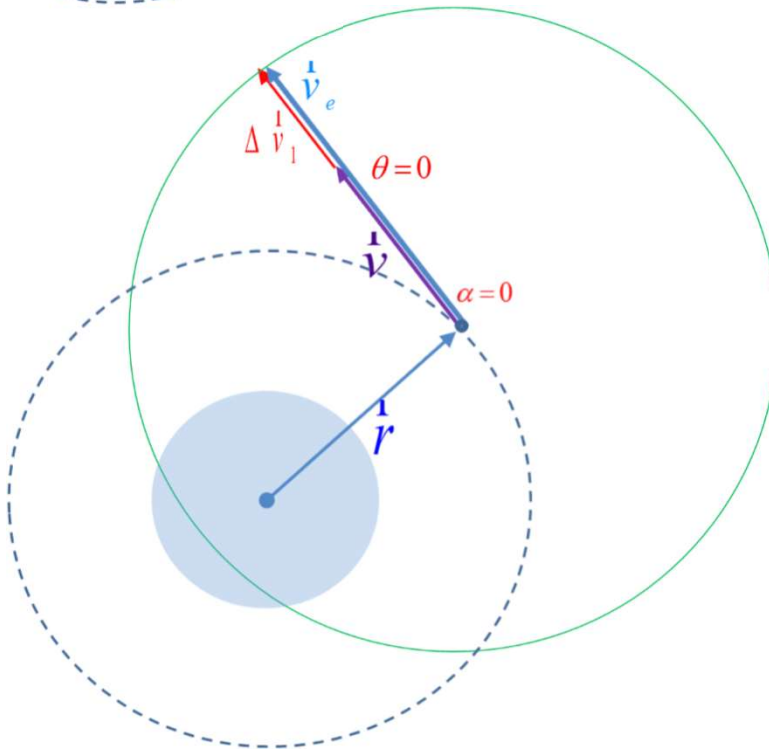
1. תוספת מהירות בכיוון משיקי למהירות המשיקית של הלוויין: Δv_1^I

תוספת המהירות היא בכיוון המהירות המשיקית

של הלוויין. כלומר: $\theta = 0$ ולכן $\alpha = 0$.

במקרה זה תוספת המהירות היא מינימלית ושווה ל:

$$(4) \quad \Delta v_1 = \sqrt{\frac{GM}{r}} \left(3 - 2 \cdot \frac{\sqrt{2} \cdot \cos 0}{2\sqrt{2}} \right)$$

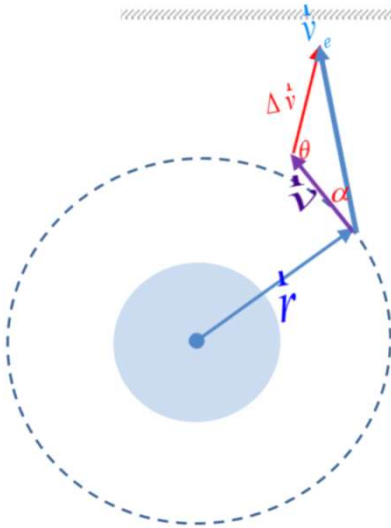


$$(5) \quad \Delta v_1 \approx 0.41 \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

תוספת מהירות על מנת למלט לוויין המסתובב סביב כוכב (4)

◀ הנוסחא הכללית:

$$(3) \quad \Delta v = \sqrt{\frac{GM}{r}} (3 - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \cos \alpha)$$



2. תוספת מהירות בכיוון מאונך למהירות המשיקית של הלוויין: Δv_2^r

תוספת המהירות היא בכיוון מאונך למהירות המשיקית

של הלוויין. כלומר: $\theta = 90^\circ$.

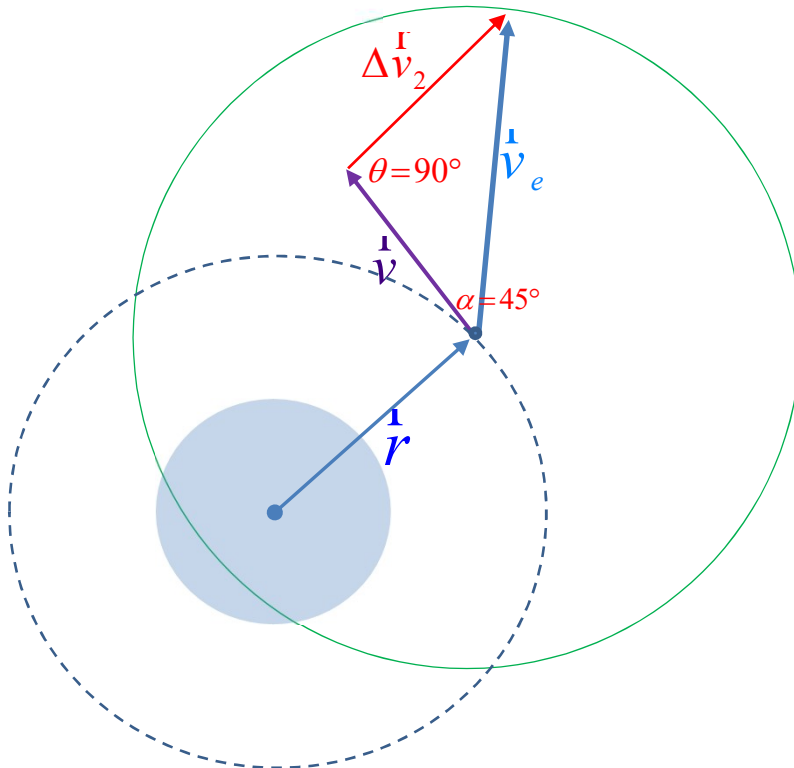
מאחר ו: $v_e = v \cdot \sqrt{2}$, אזי מתחייב: $\alpha = 45^\circ$.

נציב בנוסחא (3) ונקבל:

$$(3) \quad \Delta v_2 = \sqrt{\frac{GM}{r}} (3 - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ)$$

ומכאן:

$$(4) \quad \Delta v_2 = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$



תוספת מהירות מילוט-דוגמא (2)

◀ דוגמא 2

לווין שמסתו 150 kg מסתובב מעל נקודה קבועה בקו המשווה (לווין גיאוסטציונרי).



- א. מהו רדיוסו של מסלול הלווין?
- ב. מהי העבודה החיצונית שיש להשקיע על מנת להביא את הלווין למצבו הסטציונרי הנוכחי? (הזניחו את האנרגיה הקינטית שהיתה לו בשל הספין של כדור הארץ (סיבוב כדור הארץ סביב ציר צפון-דרום).
- ג. מהי המהירות המשיקית של הלווין במצב זה?
- ד. מהי תוספת המהירות המינימאלית שצריך להעניק ללווין, על מנת שיימלט מהשפעת כדור הארץ?

תוספת מהירות מילוט-דוגמא (2)-פתרון

פתרון דוגמא 2

א. רדיוס מסלול הלוויין:

$$\Sigma F_R = ma_R \Rightarrow \frac{GMm}{r^2} = m \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 \cdot r \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{T^2 GM}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{(24 \cdot 3600)^2 \cdot 6.673 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24}}{4\pi^2}} = 42.3 \cdot 10^6 m$$

ב. העבודה שיש להשקיע בלוויין על מנת כדי להביאו למצבו הנוכחי:

$$E_{\text{כ}R} - \frac{GMm}{R_E} + W_{EXT} = - \frac{GMm}{E_{Tr}} \Rightarrow W_{EXT} = \frac{6.673 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24} \cdot 150}{6.4 \cdot 10^6} - \frac{6.673 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24} \cdot 150}{2 \cdot 42.3 \cdot 10^6} = 8.67 \cdot 10^9 J$$

ג. המהירות המשקית של הלוויין:

$$\Sigma F_R = ma_R \Rightarrow \frac{GMm}{r^2} - \frac{mv^2}{r} = 0 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{r}} = \sqrt{\frac{6.673 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24}}{42.3 \cdot 10^6}} = 3075.87 \frac{m}{sec}$$

ד. תוספת המהירות המינימאלית שצריך לקבל הלוויין, על מנת שיימלט מהשפעת כדור הארץ (תוספת

המהירות המינימלית - כאשר מקנים אותה בכיוון מהירותו המשיקית):

$$\frac{1}{2} m(v + \Delta v)^2 - \frac{GMm}{r} = 0 \Rightarrow (v + \Delta v) = \sqrt{\frac{2GM}{r}} \Rightarrow \Delta v = \sqrt{\frac{2GM}{r}} - v$$

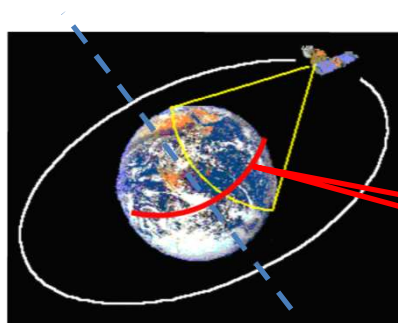
$$\Delta v = \sqrt{\frac{2 \cdot 6.673 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24}}{42.3 \cdot 10^6}} - 3075.87 = 1274 \frac{m}{sec}$$

סיכום השעור (1)

◀ לווין גיאוסטציונרי

לווין הנמצא במיקום קבוע מעל נקודה על קו המשווה ולכן יעיל כלווין תקשורת.
רדיוס סיבובו, הנמדד ממרכז כדור הארץ, הוא כ-42200 ק"מ.
האנרגיה המכנית הכוללת שלו נתונה בנוסחה :

$$E_T = -\frac{GMm}{2r} = \frac{1}{2}U_G$$

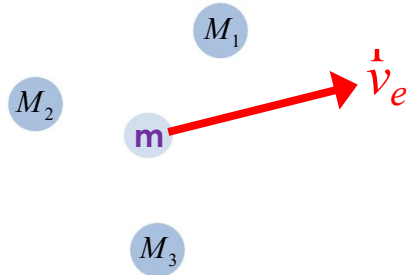


קו המשווה

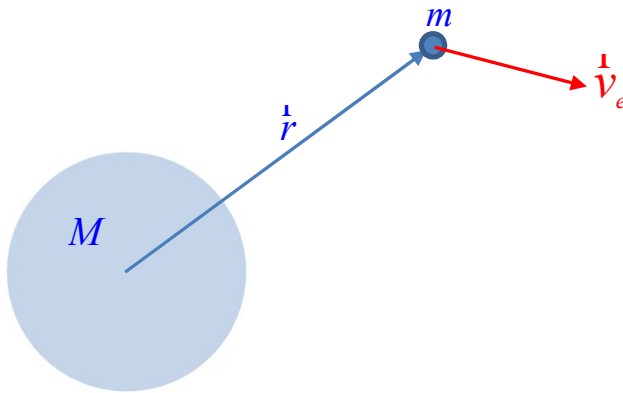
סיכום השעור (2)

◀ **מהירות מילוט** ($v_e = v_{escape}$) של חלקיק שהוא אחד מחלקיקי מערכת סגורה, מוגדרת כמהירות מינימלית שצריך שתהיה לו כדי שיוכל להימלט מהמערכת, כלומר "לברוח" למרחק אינסופי מהמערכת. במצב זה החלקיק מתרחק מהמערכת כל הזמן.

◀ כיוון מהירות המילוט אינו חשוב. אם החלקיק מצליח להימלט כאשר משגרים אותו לכיוון מסויים הוא יצליח להימלט גם אם ישגרו אותו לכל כיוון אחר.



$$v_e = \sum_i \sqrt{\frac{2GM_i}{r_i}}$$



◀ **מהירות המילוט מכוכב יחיד (מקרה פרטי)**

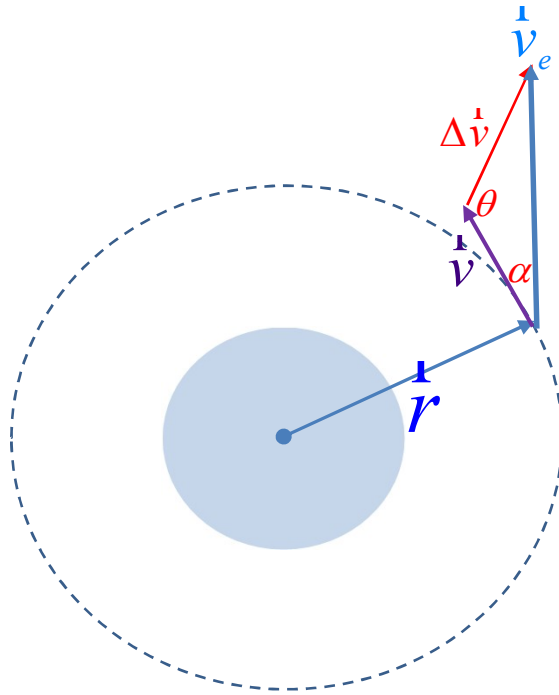
מהירות קוסמית ראשונה:

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

סיכום השעור (3)

◀ תוספת מהירות על מנת למלט לוויין המסתובב סביב כוכב :

זוהי מהירות נוספת $\Delta \dot{v}$ שיש להעניק ללוויין שכבר מסתובב סביב הכוכב על מנת למלט אותו :



$$|\Delta \dot{v}^r| = \sqrt{\frac{GM}{r} (3 - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \cos \alpha)}$$

יש חשיבות לכיוון תוספת המהירות .

◀ מקרים פרטיים

1. תוספת מהירות בכיוון משיקי למהירות המשיקית של הלוויין :

$\theta = 0$ ולכן : $\alpha = 0$

$$\Delta v_1 = 0.41 \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

2. תוספת מהירות בכיוון מאונך למהירות המשיקית של הלוויין :

$\theta = 90^\circ$ ולכן : $\alpha = 45^\circ$

$$\Delta v_2 = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$