

תרגול: חוק הכבידה העולמי



Image courtesy of Danilo Rizzuti at FreeDigitalPhotos.net

◀ חוק הכבידה העולמי של ניוטון

$$F = \frac{GMm}{r^2}$$

◀ חוק זה מאפשר לקבוע את ערכו של קבוע קפלר (הכוח המרכזי שפועל על כוכב לכת שווה לכוח הכבידה שמפעילה עליו השמש):

$$k = \frac{r^3}{T^2} == \frac{GM}{4\pi^2}$$

◀ תאוצת הכובד משתנה בהתאם למרחק ממרכז הכוכב:

$$g^* = \frac{GM}{r^2}$$

נתון גוף שמסתו 20 ק"ג על פני כדור הארץ. נתון גם כי רדיוס כדור הארץ הוא 6370 ק"מ, רדיוסו של מאדים הוא 3440 ק"מ ומסתו 0.11 ממסת כדה"א.

1. מהי מסתו של גוף זה בגובה 160 ק"מ מעל פני כדה"א?
2. מה משקלו של גוף זה באותו הגובה?
3. מהי תאוצת הכובד באותו הגובה?
4. מה משקל הגוף על פני מאדים?
5. מהו משקל הגוף ומהי תאוצת הכובד בגובה של 160 ק"מ מעל פני המאדים? נתון כי מסת מאדים היא: 639×10^{21} ק"ג

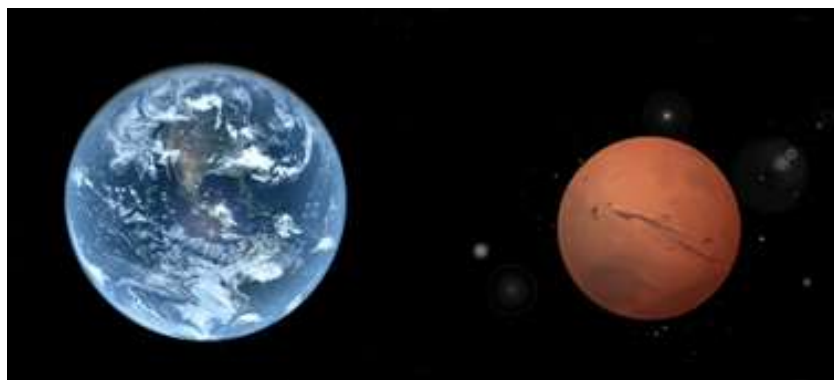


Image courtesy of fotografic1980 at FreeDigitalPhotos.net

Image courtesy of chrisroll at FreeDigitalPhotos.net

1. מהי מסתו של גוף זה בגובה 160 ק"מ מעל פני כדה"א?
- ◀ מסתו של גוף היא גודל קבוע שאינו משתנה ממקום למקום. לכן מסת הגוף תהייה 20 ק"ג גם בגובה של 160 ק"מ מפני כדור הארץ.

2. מה משקלו של גוף זה באותו הגובה?

◀ משקל הגוף על פני הארץ הוא 200 ניוטון, והוא משתנה בהתאם לכוח הכבידה הפועל על הגוף במקומות שונים.

◀ נחשב את היחס בין כוחות הכבידה הפועלים על הגוף בשני המקומות:

$$\frac{F_{h=160}}{F_{h=R}} = \frac{G \frac{Mm}{r^2}}{G \frac{Mm}{R^2}} = \left(\frac{R}{r} \right)^2$$

$$\frac{F_{h=160}}{F_{h=R}} = \left(\frac{6370}{6370 + 160} \right)^2 = 0.951$$

$$F_{h=160} = 0.951 \cdot F_{h=R}$$

$$F_{h=160} = 0.951 \cdot 200 = 190.32N$$

3. מהי תאוצת הכובד באותו הגובה?

◀ משקל הגוף שווה ל- mg^* , כאשר g^* היא תאוצת הכובד במקום בו נמדד המשקל.

◀ בסעיף הקודם חישבנו כי משקל הגוף בגובה 160 ק"מ הוא 190.32 ניוטון. לכן, הואיל והמסה היא גודל קבוע:

$$W_{h=160} = mg^*$$

$$190.32 = 20g^*$$

$$g^* = 9.51 \frac{m}{s^2}$$

4. מה משקל הגוף על פני מאדים?

◀ עבור מסה m , היחס בין כוח הכבידה של כדור הארץ לזה של מאדים (על פני כוכבי הלכת הללו) הוא:

$$\frac{F_{mars}}{F_{earth}} = \frac{G \frac{M_{mars} m}{R_{mars}^2}}{G \frac{M_{earth} m}{R_{earth}^2}} = \frac{M_{mars}}{M_{earth}} \left(\frac{R_{earth}}{R_{mars}} \right)^2 = 0.11 \left(\frac{6370}{3440} \right)^2 = 0.377$$

◀ מסת הגוף היא 20 ק"ג. לכן משקל הגוף על מאדים הוא:

$$\frac{W_{mars}}{W_{earth}} = \frac{F_{mars}}{F_{earth}} = 0.377$$

$$W_{mars} = 0.377 \cdot 200 = 75.43 N$$

5. מהו משקל הגוף ומהי תאוצת הכובד בגובה של 160 ק"מ מעל פני המאדים?
נתון כי מסת מאדים היא: 639×10^{21} ק"ג

◀ נפתור הפעם על פי חישוב מקדים של g^* בגובה 160 ק"מ מעל פני המאדים.

◀ למדנו כי גודלה של g^* כתלות במרחק ממרכז הכוכב הוא (נעבור למטרים):

$$g^* = G \frac{M}{r^2}$$

$$g^* = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{M_{mars}}{r^2} = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{639 \cdot 10^{21}}{(3440000 + 160000)^2}$$

$$g^* = 3.288 m / s^2$$

◀ משקלו של הגוף בגובה זה הוא:

$$W_{h=160} = mg^*$$

$$W_{h=160} = 20g^*$$

$$W_{h=160} = 20 \cdot 3.288 = 65.77 N$$

מבלי לדעת מהו ערכו המספרי של הקבוע G (נתון זה התגלה ע"י פיזיקאי אנגלי אחר לקראת סוף המאה ה-18), הצליח ניוטון לחשב את היחס בין מסת השמש (M_s) למסה של כל כוכב לכת אחר (M_p), בתנאי שיש לו ירח (m).

נסמן: R_m ו- T_m : רדיוס הסיבוב של הירח סביב כוכב הלכת וזמן המחזור שלו, R_p ו- T_p : רדיוס הסיבוב של כוכב הלכת סביב השמש, וזמן המחזור שלו.

1. הראו כי מתקיים:

$$\frac{M_s}{M_p} = \left(\frac{T_m}{T_p} \right)^2 \left(\frac{R_p}{R_m} \right)^3$$

2. חשבו את היחס בין מסת השמש למסת כדור הארץ. נתון כי: $R_p = 150 \times 10^8 \text{ km}$, $T_p = 365.2 \text{ days}$, $R_m = 3.85 \times 10^5 \text{ km}$, $T_m = 27.3 \text{ days}$

1. הראו כי מתקיים:

$$\frac{M_s}{M_p} = \left(\frac{T_m}{T_p} \right)^2 \left(\frac{R_p}{R_m} \right)^3$$

◀ ניזכר בחוק השלישי של קפלר, שכמובן היה ידוע לניוטון:

$$T^2 = kR^3$$

◀ למדנו כי גודלו של הקבוע k נקבע על ידי ניוטון (M היא מסת הכוכב המפעיל את הכוח המרכזי)

$$k = \frac{4\pi^2}{GM}$$

◀ נשלב את שני הקשרים הנ"ל, ונכתוב עבור כוכב הלכת (p) ועבור הירח (m):

$$T_p^2 = \frac{4\pi^2}{GM_s} R_p^3$$

$$T_m^2 = \frac{4\pi^2}{GM_p} R_m^3$$

◀ נחלק את המשוואות אחת בשנייה ונקבל:

$$\frac{T_p^2}{T_m^2} = \frac{M_p}{M_s} \cdot \frac{R_p^3}{R_m^3} \Rightarrow \frac{M_s}{M_p} = \left(\frac{T_m}{T_p} \right)^2 \left(\frac{R_p}{R_m} \right)^3$$

פתרון 2 המשך

2. חשבו את היחס בין מסת השמש למסת כדור הארץ. נתון כי: $T_p = 365.2 \text{ days}$, $R_p = 150 \times 10^8 \text{ km}$, $T_m = 27.3 \text{ days}$, $R_m = 3.85 \times 10^5 \text{ km}$.

◀ מהסעיף הקודם:

$$\frac{M_s}{M_p} = \left(\frac{T_m}{T_p} \right)^2 \left(\frac{R_p}{R_m} \right)^3$$

◀ נציב ונקבל:

$$\frac{M_s}{M_p} = \left(\frac{27.3}{365.2} \right)^2 \left(\frac{1.5 \times 10^8}{3.85 \times 10^5} \right)^3 = 3.30 \times 10^5$$

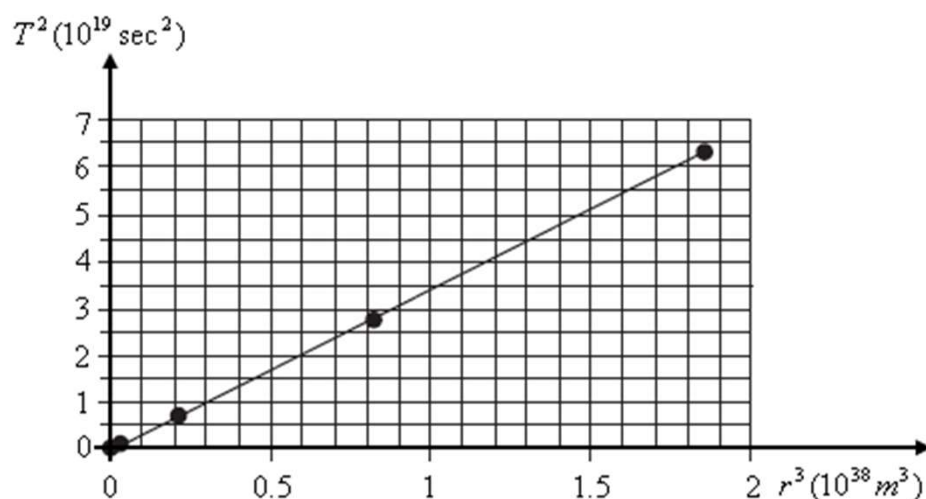
◀ שימו לב כי הואיל ומדובר ביחס, אין צורך להמיר את היחידות כל זמן שלאותם גדלים פיזיקליים יש יחידות זהות.

תרגיל 3 מבחינת הבגרות 2004

1. פתח את החוק השלישי של קפלר (בנוגע למסלולים מעגליים) על פי חוק הכבידה של ניוטון.
2. התרשים שלפניך מציג גרף של T^2 (ביחידות 10^{19} s^2) כפונקציה של r^3 (ביחידות של 10^{38} m^3) עבור 3 כוכבי לכת.

T - משך הזמן שבו כוכב לכת מקיף את השמש.
 r - מרחק כוכב הלכת ממרכז השמש.

- א. חשב את שיפוע הגרף.
- ב. חשב בעזרת שיפוע הגרף את מסת השמש.

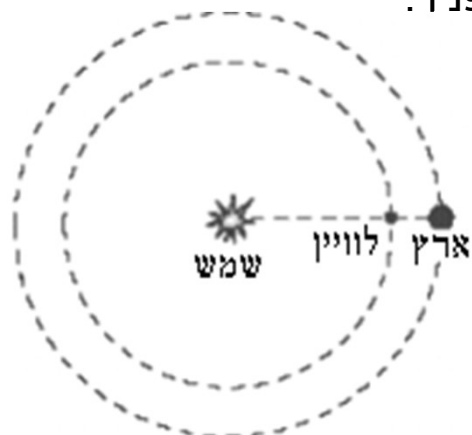


המשך התרגיל בעמוד הבא

תרגיל 3 המשך

3. לווין, שנבנה לצורך תצפיות על השמש נע במסלול מעגלי סביב השמש. הלוויין נמצא כל הזמן על הקו המחבר את השמש לארץ, כמתואר בתרשים. (מרחק הלוויין מכדור הארץ הוא קבוע. הנח שגם המסלול של כדור הארץ סביב השמש הוא מעגלי.) זמן המחזור של הלוויין בתנועתו סביב השמש הוא שנה אחת.

רשום את החוק השני של ניוטון עבור תנועת הלוויין, באמצעות חמשת הגדלים שלפניך:



r – הרדיוס של מסלול התנועה של כדור הארץ סביב השמש.

ω – התדירות הזוויתית של תנועת כדור הארץ סביב השמש.

M_s – מסת השמש.

M_E – מסת כדור הארץ

x – המרחק בין הלוויין לארץ.

הערה: אין צורך לפתור את המשוואה

4. כדור הארץ והלוויין נעים בזמני מחזור זהים, אך רדיוסי המסלולים שלהם שונים. מכאן נובע שהלוויין אינו מקיים (ביחס לשמש) את החוק השלישי של קפלר למסלולים מעגליים. מהי הסיבה הפיסיקלית לאי-קיום חוק זה?

1. פתח את החוק השלישי של קפלר (בנוגע למסלולים מעגליים) על פי חוק הכבידה של ניוטון.
 א. על פי חוק הכבידה של ניוטון עבור כוכב לכת ראשון:

$$\frac{G \cdot M_s \cdot M_1}{R_1^2} = M_1 \cdot \omega_1^2 \cdot R_1 = M_1 \cdot \frac{4\pi^2}{T_1^2} \cdot R_1$$

$$(1) \frac{G \cdot M_s}{R_1^3} = \frac{4\pi^2}{T_1^2}$$

עבור כוכב לכת שני:

$$\frac{G \cdot M_s \cdot M_2}{R_2^2} = M_2 \cdot \omega_2^2 \cdot R_2 = M_2 \cdot \frac{4\pi^2}{T_2^2} \cdot R_2$$

$$(2) \frac{G \cdot M_s}{R_2^3} = \frac{4\pi^2}{T_2^2}$$

מ-1 ו-2 נקבל:

$$\left(\frac{R_1}{R_2} \right)^3 = \left(\frac{T_1}{T_2} \right)^2$$

בהתאם לחוק השלישי של קפלר.

2. סעיפים א+ב.

◀ נחשב את שיפוע הגרף בעזרת שתי נקודות שעל הישר.

$$\frac{4.5 \cdot 10^{19} - 0}{1.3 \cdot 10^{38} - 0} = 3.46 \cdot 10^{-19} \frac{\text{sec}^2}{m^3}$$

◀ על פי הקשר עבור כוכב לכת ראשון:

$$\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{G \cdot M_s}$$

◀ מכאן, ששיפוע הגרף נתון ע"י הביטוי:

$$\frac{4\pi^2}{G \cdot M_s}$$

$$\frac{4\pi^2}{G \cdot M_s} = 3.46 \cdot 10^{-19}$$

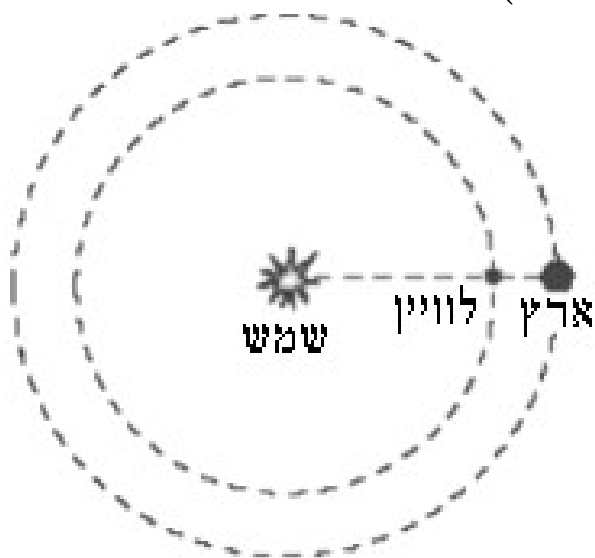
$$3.46 \cdot 10^{-19} = \frac{4\pi^2}{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot M_s}$$

$$M_s = 1.7 \cdot 10^{30} \text{ Kg}$$

3. רשום את החוק השני של ניוטון עבור תנועת הלווין, באמצעות חמשת הגדלים שלפניך
 ◀ החוק השני של ניוטון עבור תנועת הלווין:

$$\frac{G \cdot M_S \cdot m}{(r - x)^2} - \frac{G \cdot M_E \cdot m}{x^2} = m\omega^2(r - x)$$

$$\frac{G \cdot M_S}{(r - x)^2} - \frac{G \cdot M_E}{x^2} = \omega^2(r - x)$$



4. כדור הארץ והלוויין נעים בזמני מחזור זהים, אך רדיוסי המסלולים שלהם שונים. מכאן נובע שהלוויין אינו מקיים (ביחס לשמש) את החוק השלישי של קפלר למסלולים מעגליים. מהי הסיבה הפיסיקלית לאי-קיום חוק זה?

◀ הסיבה הפיסיקלית לאי קיום חוק זה היא תנועת הלוויין בהשפעת השמש ובהשפעת הארץ. הכוח שהארץ מפעילה על הלוויין אינו זניח.

1. בטבלה שלפניך רשומים נתונים על ארבעה ירחים של כוכב הלכת צדק. הנח שהירחים נעים במסלולים מעגליים. הראה כי ארבעה ירחים אלה מקיימים את החוק השלישי של קפלר. (שים לב: לא נדרש לשנות יחידות)

הירח	רדיוס מסלול $\times 10^5 \text{ km}$	זמן מחזור (ימים)
ירח מספר 1	4.22	1.77
ירח מספר 2	6.71	3.55
ירח מספר 3	10.7	7.16
ירח מספר 4	18.83	16.69

2. רוצים להכניס לוויין למסלול מעגלי סביב כוכב הלכת צדק, שרדיוס מסלולו יהיה 10^5 km . חשב מה יהיה זמן המחזור של תנועת לוויין זה.
3. בטא את המסה M של כוכב הלכת צדק באמצעות זמן מחזור T ורדיוס מסלול r של אחד מירחיו (אינך נדרש להציב מספרים).
4. לוויין נע במסלול מעגלי שרדיוסו 10^5 km סביב כוכב לכת שונה מצדק. האם זמן המחזור שלו יהיה שווה לזמן המחזור שחישבת בסעיף ב? הסבר.

1. הראה כי ארבעה ירחים אלה מקיימים את החוק השלישי של קפלר.

◀ החוק השלישי של קפלר:

$$\frac{T^2}{R^3} = K$$

◀ עבור ירח 1:

$$\frac{T_1^2}{R_1^3} = \frac{1.77^2}{4.22^3} = 0.042 \frac{d^2}{(10^5 km)^3}$$

◀ עבור ירח 2:

$$\frac{T_2^2}{R_2^3} = \frac{3.55^2}{6.71^3} = 0.042 \frac{d^2}{(10^5 km)^3}$$

◀ עבור ירח 3:

$$\frac{T_3^2}{R_3^3} = \frac{7.16^2}{10.7^3} = 0.042 \frac{d^2}{(10^5 km)^3}$$

◀ עבור ירח 4:

$$\frac{T_4^2}{R_4^3} = \frac{16.69^2}{18.83^3} = 0.042 \frac{d^2}{(10^5 km)^3}$$

◀ ארבעת הירחים מקיימים את החוק השלישי של קפלר.

2. רוצים להכניס לוויין למסלול מעגלי סביב כוכב הלכת צדק, שרדיוס מסלולו יהיה . חשב מה יהיה זמן המחזור של תנועת לוויין זה.

◀ בעזרת החוק השלישי של קפלר נשווה בין הלוויין לבין ירח מספר 1:

$$\frac{T_1^2}{R_1^3} = \frac{T^2}{R^3}$$

$$\frac{1.77^2}{(4.22 \cdot 10^5)^3} = \frac{T^2}{(10^5)^3} \Rightarrow T = 0.2d = 17650 \text{ sec}$$

פתרון 4 המשך

3. בטא את המסה M של כוכב הלכת צדק באמצעות זמן מחזור T ורדיוס מסלול r של אחד מירחיו (אינך נדרש להציב מספרים).

◀ על פי חוק הכבידה העולמי של ניוטון:

$$1) \frac{GMm}{r^2} = m \frac{v^2}{r}$$

$$2) v = \frac{2\pi r}{T}$$

◀ מ- (1) ו- (2) מקבלים:

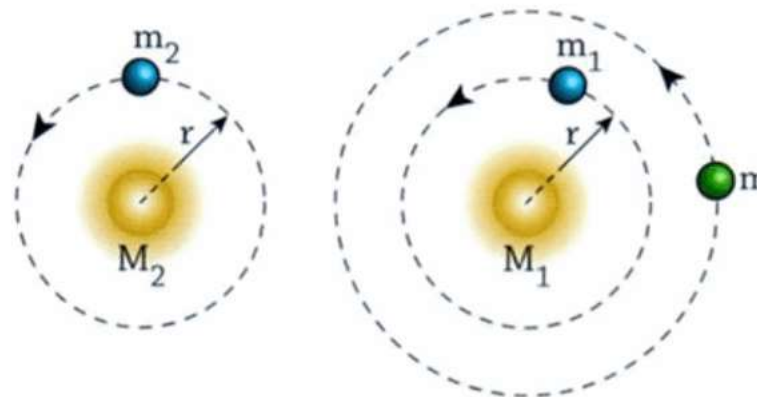
$$3) M = 4\pi^2 \cdot \frac{r^3}{T^2 \cdot G}$$

4. לוויין נע במסלול מעגלי שרדיוסו 10^5 km סביב כוכב לכת שונה מצדק. האם זמן המחזור שלו יהיה שווה לזמן המחזור שחישבת בסעיף ב? הסבר.
- ◀ על פי הנוסחה (3), אם הרדיוסים שווים אך המסות של כוכבי הלכת שונות, זמן המחזור יהיה שונה.
- ◀ **נימוק אחר:** החוק השלישי של קפלר מתייחס רק לתנועה סביב אותו מרכז.

מכניקה ניוטונית חלק ב', עמוד 218

18. לוויין מקיף פלנטה סמוך לפנייה. משך ההקפה של הלוויין T , וצפיפותה הממוצעת של הפלנטה היא ρ . הוכיחו כי $T^2 \propto \rho$ קבוע עולמי (כלומר אינו תלוי בנתוני הפלנטה או בנתוני הלוויין). מהו ערכו של הקבוע?

16. סביב שני כוכבים שמסותיהם M_1 ו- M_2 חגים שני לוויינים קטנים שמסותיהם m_1 ו- m_2 בהתאמה. המסלולים הם מעגלים שרדיוסם r .



זמן המחזור של m_1 גדול פי שניים מזה של m_2 .

א. חשבו את יחס המסות M_1/M_2 .

ב. אחרי גילוי לוויין חדש שמסתו m החג סביב הכוכב שמסתו M_1 , נמצא שמחזורו גדול פי 8 מזה של m_1 . בטאו באמצעות r את רדיוס מסלולו.

תרגילים מומלצים מהספר מכניקה ניוטונית חלק ב'

◀ עמוד 217 תרגילים: 9, 12, 13, 14