

חישוב שגיאות

שגיאות שיטתיות ושגיאות אקראיות – כללי

קביעתו של גודל פיסיקלי לעולם איננה מדויקת לחלוטין. מגבלות מסוימות – הנוצרות במכשירים, בתהליך המדידה, ולעתים אף באישיות המודד – גורמות לשגיאות שונות בתוצאת המדידה. אפשר לאמוד שגיאות אלה. לאומדן נועדת חשיבות רבה, לשם קביעת מידת המהימנות של המדידה.

שגיאות המדידה הן בחלקן **שיטתיות** ובחלקן **אקראיות** (אף כי לעתים אין אבחנה זו ברורה די צרכה). הראשונות נובעות מגורמים קבועים, ובהתאם לכך הן חוזרות ונשנות באותה מגמה עצמה. אם בתהליך השקילה של גוף משתמשים במשקולת מזויפת תהיה תוצאת השקילה מוטעית.

השגיאות האקראיות נובעות, לאומת זאת, מגורמים הפועלים במגמות שונות ומשתנות: מגבלות הדיוק הטבעיות של מכשירי המדידה והאיש המודד, שינויים אקראיים בתנאי המדידה וכו'. בהתאם לכך – אם נחזור על מדידה מסוימת פעמים שחדות, תהיינה תוצאותיה שונות במקצת זו מזו. בהעדר שגיאות שיטתיות נוכל להניח, כי שגיאות המדידה בשני כיוונים דומות, וכי נשום כך משקף הממוצע החשבוני של התוצאות את התוצאה האמיתית באופן הטוב ביותר.

באופן איכותי אפשר לאמר ש**שגיאה אקראית** נובעת בהכרח מגורם המשתנה מהר ביחס לזמן הכולל של הניסוי, לכן משתנה ממדידה למדידה, וגורם לפיזור בתוצאות. (דוגמא: השפעת ציר לא מושלם על קצב השעון, לפעמים יש יותר חיקוק, לפעמים פחות). **שגיאה שיטתית** היא כזו אשר נשארת קבועה בזמן הניסוי וגורמת להזזה של כל התוצאות בערך קבועה, או הכפלה בגורם קבוע. (דוגמא: שעון שהולך לאט מדי כיוון שכך מכון המנגנון שלו).

בדרך כלל יופיעו שני סוגי השגיאות בסידרת מדידות.

את השפעתה של שגיאה אקראית על המהימנות של מדידת גודל פיסיקלי אפשר להקטין על-ידי חזרה על המדידה מספר פעמים ועשיית מיוצע כפי שמוסבר בהמשך. על-ידי המיוצע מתקבל ערך בכל שגיאה אקראית קטנה אבל נשארת השגיאה השיטתית במידה וקיימת.

עבור שגיאה שיטתית, ניתן לתקנה רק עם גודלה ידוע, או שידוע הגורם שלה ואפשר למדוד על-ידי מדידת עזר. תיקון כזה הוא בעצם כיול של מכשירי המדידה.

בנספח זה ניתן תדריך כיצד לטפל בשגיאות מדידה וכיצד "לבשל" מן הערכים המדודים מספר לדיווח. התדריך בנוי בצורת אוסף נוסחאות, כמעט בלי הוכחות.

טיפול בשגיאה האקראית של גודל מדוד

(א) הקדמה: מודדים גודל פיסיקלי x מספר פעמים n . צורת המדידה לגודל מסוים היא קבועה בכל המדידות. לדוגמא: זמן מחזור של מטוטלת – מדידה בעזרת שעון-עצר.

מתקבלות התוצאות השונות אחת מהשניה: $x_1, x_2, \dots, x_n$. סיבות אפשריות לכך הן רבות. למשל, בדוגמא עם המטוטלת:

א. פילוג במדידת הזמן (תלוי במהירות התגובה של המודד).

ב. כושר דיוק לא מספיק של השעון.

ג. שינוי בזמן המחזור בין מדידה למדידה כאשר הטמפרטורה ולכן האורך של המטוטלת משתנה.

נניח שאיננו מנתחים את סיבת ההבדלים בין ערכי x_i . נגדיר גדלים אשר מאפיינים את קבוצת התוצאות, בעיקר מבחינת גודל השגיאה.

(ב) הערך המסתבר ביותר:

לממוצע החשבוני של x_i נקרא "ערך מסתבר ביותר".

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

נגדיר d_i , סטייה של x_i , על-ידי: $d_i = x_i - \bar{x}$

קל להבין כי סכומן שווה לאפס: $\sum_{i=1}^n d_i = 0$

משפט: לערך המסתבר ביותר $\bar{x}$ יש את התכונה הבאה: אם עושים מינימליזציה

$$\text{של } \sum_{i=1}^n (x_i - x)^2 \text{ מתקבל } x = \bar{x}.$$

פרוש: סכום ריבועי הסטיות מ- x רצוי הוא קטן ביותר כאשר $x = \bar{x}$. סכום זה

$$\text{הוא אז: } \sum_{i=1}^n d_i^2.$$

(ב) סטיית התקן בפילוג x_i :

סטיית התקן S מודדת את רוחב פילוג ה- x_i . הגדרה:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n d_i^2}{n-1}}$$

S שואף לערך גבולי קבוע S_∞ כאשר $n \rightarrow \infty$. אפשר להראות שכאשר הפילוג הוא נורמלי (ראה להלן) וכאשר n גדול, כ- **68% מערכי x_i נמצאים בתחום $\bar{x} \pm S$** . במילים אחרות S מודד את השגיאה ה"סבירה" של מדידה אחת. **ברוב המחשבונין S מופיע מסומן כ- σ_{n-1}** .

$$\text{(ב) שגיאת התקן של } \bar{x} : \delta = \frac{S}{\sqrt{n}}$$

שגיאת התקן δ מוגדרת כך: δ שואף לאפס כאשר $n \rightarrow \infty$.

משיקולים סטטיסטיים נובע שעבור פילוג נורמלי, $\bar{x}_\infty$, שהוא ערכו האמיתי של $\bar{x}$ (בערך שהיה מתקבל עבור $n = \infty$) נמצא עם סיכוי של **68% בתחום $\pm \delta$ סביב $\bar{x}$** . לכן δ מודד את השגיאה הממוצעת של $\bar{x}$, שהוא ממוצע של n מדידות. זהו בד"כ המספר המאפיין את דיוק של גודל המדידה. אנו נדווח על תוצאה בצורה

$$\text{הבאה: } x = \bar{x} \pm \delta \text{ . למשל:}$$

$$T = (3.15 \pm 0.05)s$$

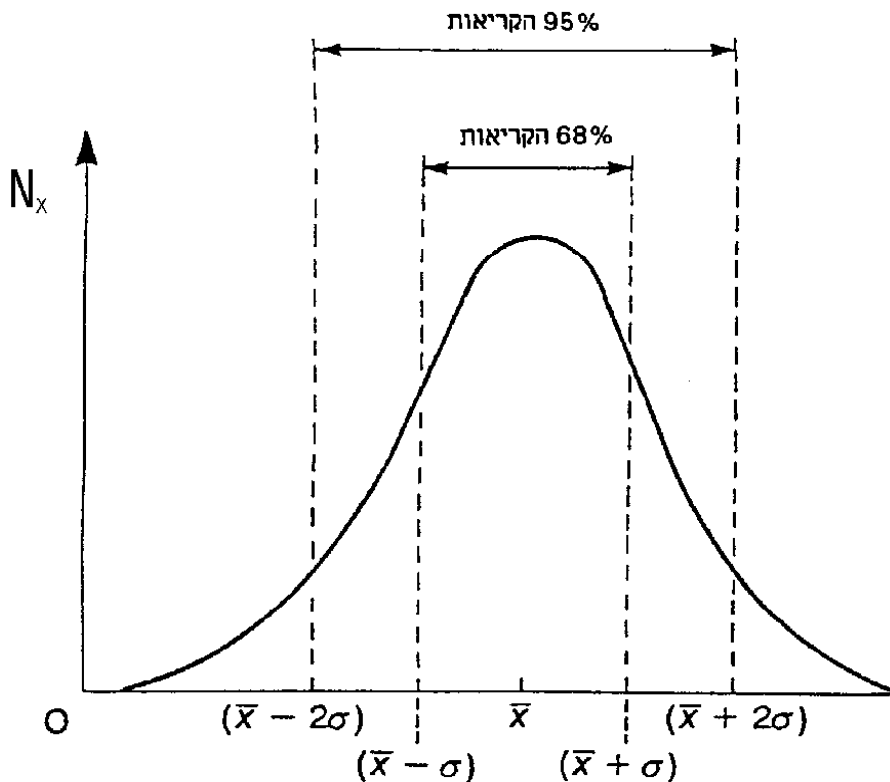
שגיאת התקן היא דוגמא טובה לכך שדיוק של מספר שמקבלים לאחר המדידה עולה עם מספר המדידות. התלות בשורש מספר המדידות היא אופיינית ומופיעה בהרבה חישובים סטטיסטיים. פרושה שאם רוצים אנו להגדיל את הדיוק פי 10 אנו צריכים להגדיל את מספר המדידות פי 100, כלומר זקוקים לזמן הארוך פי 100!

טיפול בשגיאה האקראית של גודל מדוד

אפשר להוכיח שכאשר n הוא מספר גדול מאוד ($n \rightarrow \infty$) התוצאות x_i מפולגות בדרך-כלל לפי "עקום השגיאות של גאוס" (ראה תרשים שלהלן). x היא תוצאת המדידה ואילו $N(x)dx$ - ההסתברות להופעת התוצאה בתחום $(x, x+dx)$. העקום הוא סימטרי מסביב לערך ממוצע x_0 , ושואף אסימפטוטית לאפס עם גידול הסטייה מערך ממוצע זה.

משוואת העקום: $N(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}}$. הפרמטר σ משמש מודד לרוחב עקומת

גאוס: ההסתברות להופעת התוצאה- x , יורדת פי e מערכה כאשר: $x = x_0 \pm \sqrt{2}\sigma$.



x_0 מזוהה עם $\bar{x}_\infty$ ו- σ מזוהה עם S_∞ (שהוגדרו לעיל). 68% מערכי x_i נמצאים בתחום $x_0 \pm \sigma$. אם צורת הפילוג עבור $n \gg 1$ סוטה באופן ברור מעקומת גאוס (למשל: שני שיאים במקום אחד) יש לחפש סיבה לדבר: יכול למשל להיות שהפעלת שעון העצר ביד ימין נותנת זמני מחזור קצרים יותר מאשר יד שמאל.

כאמור המרחק בין x_0 ל- $\bar{x}$ המחושב עבור k סופי יהיה ב- 68% מן המקרים פחות מאשר δ .