

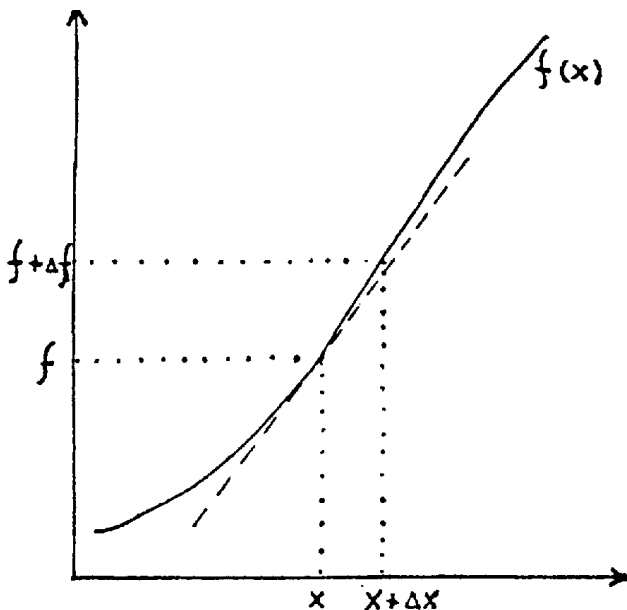
חישוב שגיאות של גדלים עקיפים

בסעיפים הקודמים דיברנו על השיטות להערכת שגיאה של גדלים הנמדדים ישירות באמצעות מכשירי המדידה; לדוגמה, אורך הנמדד בסרגל או זמן הנמדד באמצעות שעון הם גדלים הנמדדים ישירות. לעתים קרובות אנו מעוניינים לא רק בגדלים הנמדדים עצמם, אלא גם בגדלים עקיפים שהם פונקציות של הגדלים הנמדדים ישירות. לדוגמא:

א. אנו מודדים זווית בעזרת מד-זווית, אולם לצורך חישובים כלשהם אנו מעוניינים בסינוס של הזווית ולא בזווית עצמה.

ב. אנו מעוניינים למדוד שטח של מלבן; לשם כך אנו מודדים בסרגל את אורכו ורוחבו, ומכפילים אותם זה בזה. כאן, השטח הוא פונקציה (מכפלה) של האורך והרוחב. מכיוון שהגודל העקיף הוא פונקציה של הגדלים הנמדדים ישירות, ברור ששגיאה במדידת הגדלים הישירים תגרום לשגיאה בהערכת הגודל העקיף. בסעיפים הקודמים ראינו כיצד להעריך את שגיאותיהם של הגדלים הנמדדים ישירות: כעת, כשאנו יודעים את גודלם של השגיאות האלו, אנו מעוניינים לחשב בעזרתן את השגיאה של הגודל העקיף. בניסוח מתמטי, אנו מעוניינים לענות על השאלה: אם f הוא פונקציה מסוימת של גדלים שונים $x, y, z, \dots$ ושגיאותיהם של הגדלים האלו הן $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \dots$, מהי השגיאה Δf ? כדי לענות על השאלה נטפל במקרה הפשוט, שבו f הוא פונקציה של גודל אחד בלבד שהוא x .

א. חישוב שגיאה בפונקציה של משתנה אחד



כזכור, אנו מניחים שידועות לנו צורת הפונקציה $f(x)$, תוצאת המדידה x ושגיאתה Δx . אפשר לנסח מחדש את השאלה שלנו כך: נניח שהתוצאה x משתנה ב- Δx , מהו השינוי Δf של f ? כדי לענות על השאלה, נסתכל בגרף המתאר את $f(x)$ כפונקציה של x (ראה תרשים).

הנקודות (x, f) ו- $(x + \Delta x, f + \Delta f)$ נמצאות שתיהן על הגרף. בהנחה שהשגיאות קטנות (כלומר Δx ו- Δf קטנים), ושהפונקציה $f(x)$ איננה משתנה באופן קיצוני בסביבה של x , אזי בתחום שבין x ל- $x + \Delta x$ הפונקציה $f(x)$ קרובה לקו הישר המשיק לגרף בנקודה (x, f) (הקו המרוסק בגרף שבתרשים דלעיל), ולכן היחס בין Δf ל- Δx שווה בערך לשיפוע המשיק, כלומר לנגזרת של $f(x)$ בנקודה x . לכן:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} \cong \frac{df}{dx} \quad (1)$$

(זוהי למעשה הנגזרת) כלומר:

$$\Delta f = \left| \frac{df}{dx} \right| \Delta x \quad (4)$$

וזוהי התשובה לשאלתנו. הערך המוחלט נכנס כאן משום שאנו מעוניינים רק בגודלה של השגיאה Δf , ואיננו רוצים שסימן מינוס שמקורו בנגזרת (אם $f(x)$ היא פונקציה יורדת של x) יופיע בתשובה הסופית. כזכור, אנו מחשבים את הנגזרת בנקודה x , כלומר בנקודה המתאימה לתוצאת המדידה שבצענו.

ב. חישוב שגיאה בפונקציה של כמה משתנים

כעת אנו נניח שיודעות לנו צורת הפונקציה $f(x, y, z, \dots)$, תוצאות המדידה $x, y, z, \dots$ ושגיאותיהן $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \dots$. כדי לענות על שאלתנו עכשיו, ננסה לענות קודם על שאלה פשוטה יותר: נניח שרק x משתנה ב- Δx , וכל שאר הגדלים $y, z, \dots$ נשארים קבועים; מהו השינוי ב- f הנגרם רק על-ידי השינוי ב- x ? (נסמן שינוי זה של f ב- $\Delta_x f$). כיוון שהגדלים $y, z, \dots$ אינם משתנים, אפשר להתייחס ל- f כאילו היא פונקציה של x , ולגזור אותה: נגזרת כזו, המתקבלת כתוצאה מגזירת פונקציה רבת-משתנים ביחס למשתנה אחד בלבד, כאשר מתייחס לכל שאר המשתנים כאילו היו קבועים, נקראת בשם **נגזרת חלקית** ומסומנת כך: $\frac{\partial f}{\partial x}$. כעת אפשר להשתמש בנוסחה (4) ולקבל:

$$\Delta_x f = \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \Delta x \quad (5)$$

באופן דומה, $\Delta_y f = \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \Delta y$, $\Delta_z f = \left| \frac{\partial f}{\partial z} \right| \Delta z$ וכו'.

לאחר שחישבנו את גודלם של השינויים $\Delta_x f, \Delta_y f, \dots$ (נכנה שינויים אלו בשם **השגיאות החלקיות**), נחזור לשאלה המקורית: מהו השינוי Δf הנגרם בגלל השינויים בכל הגדלים $x, y, z, \dots$? אנו מניחים שהשגיאות החלקיות קטנות, ולכן אפשר להתעלם מהשפעתו של השינוי של אחד מהגדלים האלו על גודלן של השגיאות על גודלן של השגיאות החלקיות הנגרמות בגלל שאר הגדלים. לכן, השינוי של כל אחד מהגדלים $x, y, z, \dots$ יסיט את ערכה של הפונקציה f כלפי מעלה או מטה בכמות השווה לגודלה של השגיאה החלקית המתאימה שחישבנו בעזרת הנוסחה (5). במקרה הגרוע ביותר, שבו כל השגיאות החלקיות מסיטות את f לאותו כיוון, יהיה גודל השינוי של f שווה לסכום כל השגיאות החלקיות, כלומר:

$$\Delta f = \Delta_x f + \Delta_y f + \dots = \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \Delta x + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \Delta y + \dots \quad (6)$$

אולם הערכה זו היא פסימית מדי. ראשית, הערכות השגיאה שלנו הן מכסימליות, וברוב המקרים תהיה השגיאה האמיתית במדידת x קטנה מהערכה Δx ; הסיכוי לכך שכל השגיאות יקבלו בבת-אחת את ערכן המקסימלי הוא קטן. שנית, מכיוון שאנו עוסקים בשגיאות אקראיות, חלק מהשגיאות של הגדלים הנמדדים ישירות יגדילו את ערכו של f ואחרות יקטינו אותו. לכן, הערכת השגיאה הכללית המתקבלת מנוסחה (6) היא מוגזמת. תורת הסטטיסטיקה (שוב לא נביא כאן את החישוב) מאפשרת לקבל הערכה טובה יותר לגודלו של Δf : הערך הסביר ביותר של Δf הוא שורש בכום הריבועים של השגיאות החלקיות, כלומר:

$$\Delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \Delta x \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \Delta y \right)^2 + \dots} \quad (7)$$

(ויתרנו על הערך המוחלט משום שהעלאה בריבוע מבטלת את הסימן). במעבדה נשתמש אפוא בנוסחה (7) ולא בנוסחה (6). כדוגמאות לשימוש בנוסחה (7), נחשב נוסחאות כלליות שימושיות עבור פונקציות פשוטות.

ג. חישוב שגיאה של סכום ושל הפרש

נניח שאנו מעוניינים לחשב שגיאה של סכום שני גדלים, שלכל אחד מהם שגיאה משלו. כלומר, $f = x + y$, ולכן $\frac{\partial f}{\partial x} = 1$ (כי טל y אנו מתייחסים כאל רבוע, הנופל

בגירה, הנגזרת של x ביחס לעצמו היא 1), וגם $\frac{\partial f}{\partial y} = 1$. לכן, לפי נוסחה (5):

$$\Delta f = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \quad (6)$$

כלומר, שגיאת הסכום f שווה לשורש סכום הריבועים של שגיאות המחוברים. כלל זה תקף גם עבור יותר משני מחוברים. קל לראות שנוסחה (6) תקפה עבור הפרש, כלומר גם עבור $f = x - y$.

ד. חישוב שגיאה של מכפלה של מנה

נניח כי, $f = xy$. כעת $\frac{\partial f}{\partial x} = y$ ו- $\frac{\partial f}{\partial y} = x$. לכן, לפי נוסחה (7)

$$\Delta f = \sqrt{y^2(\Delta x)^2 + x^2(\Delta y)^2} \quad (7)$$

ערכה של השגיאה היחסית של $\frac{1}{f}$ שווה אפוא:

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{\sqrt{y^2(\Delta x)^2 + x^2(\Delta y)^2}}{xy} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{y}\right)^2} \quad (8)$$

כלומר, השגיאה היחסית של מכפלה שווה לשורש סכום הקיבועים של השגיאות היחסיות של הכופלים. כלל זה תקף גם עבור יותר משני כופלים. אפשר להראות (ההוכחה ניתנת בתרגיל) שנוסחה (8) תקפה עבור המנה, כלומר עבור $f = \frac{x}{y}$.

ה. הערות

1. בנוסחאות (6) ו-(8) אפשר להשתמש גם עבור ביטוי מסובך המורכב מסכומים ומכפלות (או מנות). לדוגמא, אם $f = \frac{x+y}{z-w}$, אזי אפשר לחשב את השגיאה של המונה $x+y$ ושל המכנה $z-w$ בעזרת נוסחה (5), לחשב את השגיאה של f . קל להראות (ההוכחה ניתנת כתרגיל) שהתוצאה היא

$$\Delta f = \frac{x+y}{z-w} \sqrt{\frac{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}{(x+y)^2} + \frac{(\Delta z)^2 + (\Delta w)^2}{(z-w)^2}} \quad (9)$$

אולם יש להיזהר מהפעלת שיטה זו. נוסחאות (6) ו-(8) תקפות רק כאשר הגורמים x ו- y אינם תלויים זה בזה; לדוגמה, כאשר אותו גורם מופיע גם במונה וגם במכנה של מנה (למשל, כאשר $f = \frac{x}{x+y}$) אזי שגיאתו תשפיע גם על המונה וגם על המכנה, ולכן שגיאות המונה והמכנה לא יהיו בלתי תלויות זו בזו. במקרה כזה (ובכל מקרה של ספק) עלינו לגזור במפורש את f ולהשתמש בנוסחה (5).

2. על הכללים שפורטו בסעיפים 3 ו-4 (בעניין רישום השגיאה וספרות משמעותיות) נקפיד כמובן גם כאשר שגיאה היא של גודל עקיף, כלומר נרשום $f \pm \Delta f$ ונסלק ספרות לא משמעותיות.

1. מספרות משמעותיות

כאשר רושמים עבור אורכו של גוף $12.53 \pm 0.02 \text{ cm}$, משמעות הדבר שיש הסתברות ניכרת (כי - $2/3$ ויותר) שהאורך האמיתי יהיה בתחום שבין 12.51 cm ל- 12.55 cm . כאן עלינו לשים לב שהספרה האחרונה (במקרה שלנו 3) היא לא מדויקת, ומתארת גודל שהוא מסדר הגודל של השגיאה עצמה, אך עלינו לרשום אותה. עם גודל רשום באופן 12.53 cm מבלי לציין באופן מפורש מהי השגיאה, ניתן להבין שהשגיאה מסדר הגודל של 0.01 cm , כי הספרה האחרונה היא ספרה לא בטוחה (אך משמעותית).

שאלות

א. מה דעתך על כתיבת תוצאה באופן 12.5 ± 0.002 , ומה דעתך על כתיבת תוצאה באופן 12.5132 ± 0.02 ?

ב. באם קיים הבדל בין 12.5 ל- 12.50 ?

אופן כתיבה נכון של ערך מדוד הוא למשל 12.510 ± 0.005 כי ניתן לחשוב ש- 0.005 הוא מאותו סדר הגודל של 0.01 . לעתים נוהגים גם לתת את השגיאה בעזרת שתי ספרות, למשל כאשר רושמים 12.512 ± 0.022 .

דוגמה

להלן נביא דוגמה לחישוב שגיאות לפי שיטת המקרה הגרוע ביותר:

מודדים את מהירות u של קליע באמצעות מטוטלת באליסטית על סמך חוק ההתנגשות הפלסטית. אם מסת הקליע m ומסת המטוטלת M , תחושב מהירותם המשותפת v , לאחר שפגע הקליע במטוטלת; על פי חוק שמור התנע $mu = (m + M)v$, לפיכך $u = \frac{(m + M)v}{m}$, המהירות v קטנה בהרבה מן המהירות u , לפיכך נוחה יותר להימדד. מודדים אפוא את M , m , v ומחשבים מתוכם את u . נניח כי קיבלנו את הנתונים לגבי הגדלים באופן ישיר.

$$M = 870.3 \text{ kg} \quad \text{שלב א':}$$

$$m = 3.45 \text{ kg}$$

$$v = 513 \text{ cm/s}$$

$$\Delta M = 0.1 \text{ kg} \quad \text{שלב ב':}$$

$$\Delta m = 0.05 \text{ kg}$$

$$\Delta v = 2 \text{ cm/s}$$

$$u = \frac{M + m}{m} v \quad \text{שלב ג':}$$

$$u = \frac{870.3 + 3.45}{3.45} \cdot 513 = 128415.7 \text{ cm/s} = 1284.157 \text{ m/s}$$

$$\Delta u = \left| \frac{\partial u}{\partial M} \right| \Delta M + \left| \frac{\partial u}{\partial m} \right| \Delta m + \left| \frac{\partial u}{\partial v} \right| \Delta v \quad \text{שלבים ד', ה':}$$

לביצוע הנגזרות החלקיות מול לכתוב את u בצורה הבאה:

$$u = \left(\frac{M}{m} \right) v + v$$

$$\frac{\partial u}{\partial M} = \frac{v}{m} ; \quad \frac{\partial u}{\partial m} = \frac{-Mv}{m^2} ; \quad \frac{\partial u}{\partial v} = \frac{M}{m} + 1$$

$$\Delta u = \left(\frac{v}{m}\right)\Delta M + \left(\frac{Mv}{m^2}\right)\Delta m + \left(\frac{M}{m} + 1\right)\Delta v = \frac{513}{3.45} \cdot 0.1 + \frac{870.3 \cdot 513}{3.45^2} \cdot 0.05 + \left(\frac{870.3}{3.45} + 1\right) \cdot 2$$

$$= 23.75 m/s$$

התוצאה הסופית היא:

$$u \pm \Delta u = 1284 \pm 24 m/s$$