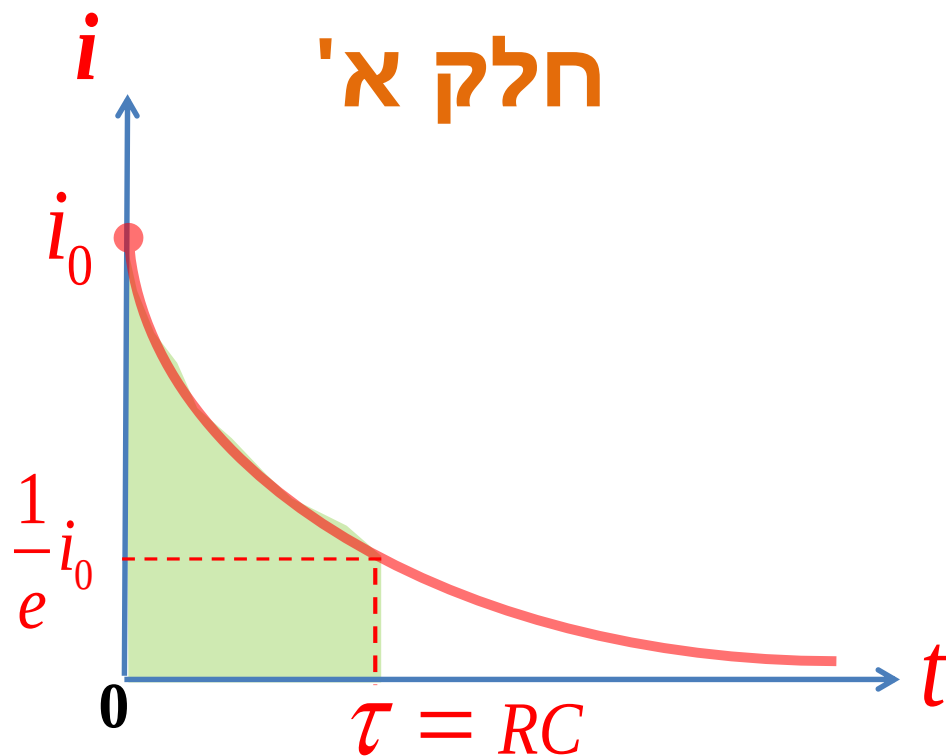


חשמל מעגלי-RC חלק א'

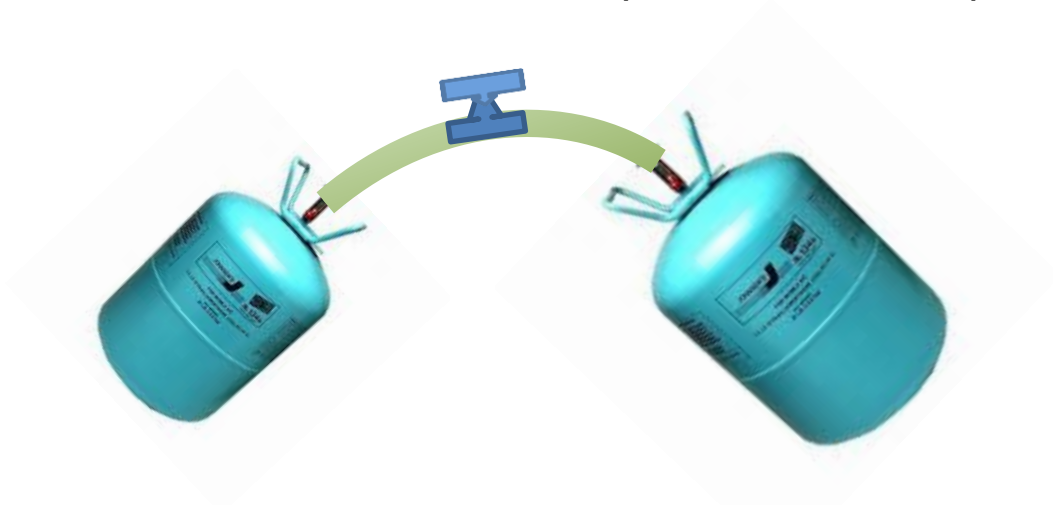


◀ תהליכי דעיכה:

- הסבר כללי.
- רקע מתימטי.
- זמן מחצית חיים.
- קבוע הזמן.

◀ תהליכים רבים בטבע ובטכנולוגיה הינם תהליכים אינסופיים אשר רמת הפעילות שלהם קטנה, בהדרגה עם חלוף הזמן. אך פעילות זו לעולם אינה מסתיימת.

נתבונן, לדוגמא, בשני בלוני גז קשיחים, מלאים בגז אך נמצאים בלחצים שונים :



אם כמות הגז בבלון הימני שווה לכמות הגז בבלון השמאלי-אזי לחץ הגז בבלון השמאלי גבוה יותר מאשר בבלון הימני מאחר ונפחו קטן יותר.

לפיכך - אם נפתח את השסתום כך שגז יוכל לזרום בחופשיות מבלון אחד למשנהו-יזרום גז מהבלון השמאלי אל הבלון הימני על מנת להשוות לחצים.

תהליכי דעיכה (2)

כל עוד הפרש הלחצים בין שני הבלונים-גבוה, הזרימה מהבלון השמאלי אל הבלון הימני תהיה קולחת ומהירה. אך ככל שיקטן הפרש הלחצים-קצב מעבר הגז יתמתן יותר ויותר.

הזרימה תימשך לנצח. היא לא תיפסק לחלוטין לעולם. התהליך הוא אינסופי.

הגרף המתאר את קצב זרימת הגז מהבלון בעל הלחץ הגבוה אל הבלון בעל הלחץ הנמוך יראה כך :

(כאשר: t מייצג את הזמן החולף מרגע פתיחת השסתום, ו: i מייצג את זרם הגז

העובר מהבלון השמאלי אל הבלון הימני).

כאמור-תהליכים רבים בטבע ובטכנולוגיה הינם תהליכי דעיכה. כגון:

– **דיפוזיה (פיעפוע)**-מעבר חלקיקי חומר (גז, נוזל או מוצק) ממרחב בו ריכוזם גבוה אל מרחב בו ריכוזם נמוך.

– **אוסמוזה**-סוג של דיפוזיה בו חלקיקי ממס (חומר ממיס) עוברים דרך קרום עביר למחצה ממרחב בו ריכוזם

גבוה אל מרחב בו ריכוזם נמוך. אוסמוזה היא בדרך כלל דיפוזיה של מים דרך קרום החדיר למים

אך אטום למוליקולות החומר המומס במים.

– **התפרקויות רדיואקטיביות ספונטאניות.**

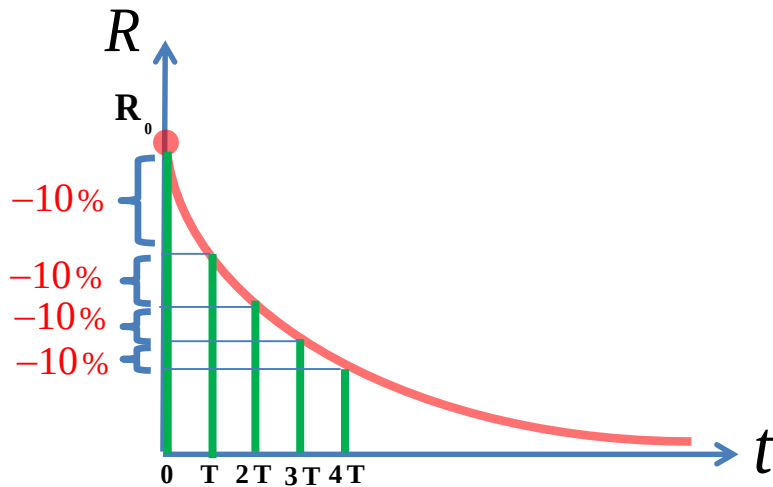
– **מעבר גז מאזור לחץ גבוה אל אזור לחץ נמוך.**

– **מעבר חום מגוף חם לגוף קר.**

– **טעינה ופריקה של קבל. ועוד...**

תהליכי דעיכה - רקע מתימטי (1)

- המאפיין המשותף לכל תהליכי הדעיכה הוא כמות כלשהי שנשמנה באות R ההולכת ופוחתת. ישנה כמות דועכת מסויימת (חומר, זרם, לחץ, ריכוז תמיסה וכו'), כאשר בכל יחידת זמן, אחוז קבוע מהכמות הנותרת-דועך. תהליכי דעיכה פיסיקליים הם **תהליכים רציפים**.
- לשם המחשה**-נניח שבזמן $t=0$ כלשהו כמות החומר היא R_0 .
- נניח גם שבכל פרק זמן T - הכמות דועכת ב 10% . ולכן הכמות הנותרת היא : $90\%=90/100=0.9$.



- נערוך טבלה בה נציג את יתרת הכמות בתום כל פרק זמן :

זמן	הכמות שנותרה
0	0
T	$R_0 \cdot 0.9$
$2T$	$R_0 \cdot 0.9^2$
$3T$	$R_0 \cdot 0.9^3$
n	
nT	$R_0 \cdot 0.9^n$

הגרף ממחיש ירידה של 10% בכמות בכל פרק זמן T

- נקבל סדרה הנדסית יורדת אשר מנתה 0.9 . כמות החומר לאחר n פרקי זמן תהיה לפיכך : $R_n = 0.9^n \cdot R_0$

תהליכי דעיכה - רקע מתימטי (2)

◀ כעת נרצה לפתח **נוסחא כללית** המתאימה לכל תהליכי הדעיכה.

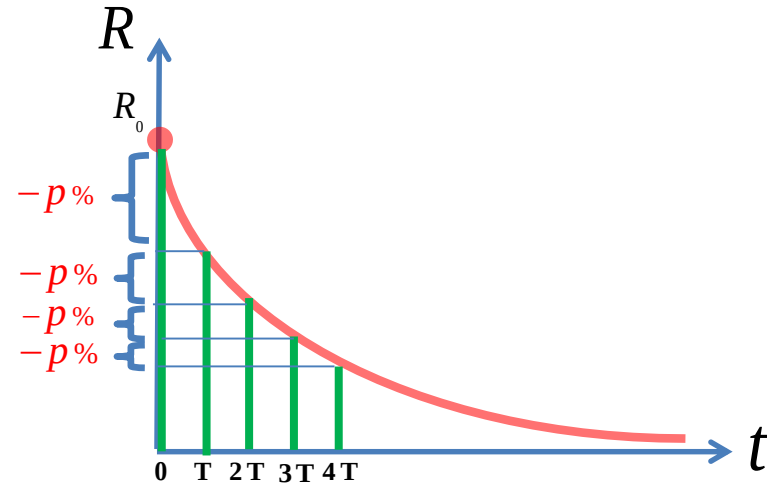
◀ בכל פרק זמן T הכמות דועכת ב $p\%$ ולכן הכמות הנותרת היא : $(100 - p)\% = \frac{100 - p}{100}$

◀ נגדיר שבר הנקרא : **קבוע הדעיכה** באות : q . כך ש : $q \equiv \frac{100 - p}{100}$.

◀ נערוך טבלה בה נציג את יתרת הכמות בתום כל פרק זמן T .

לצד הטבלה מוצג גרף המתאר את הכמות הנותרת בתום כל פרק זמן T :

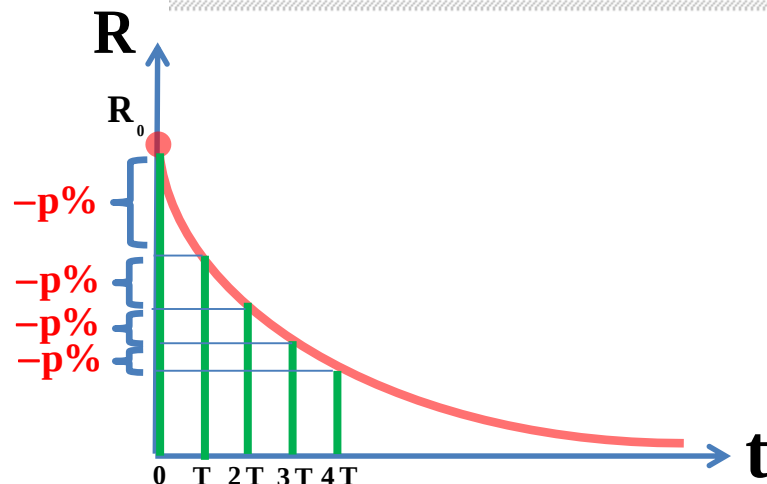
זמן	הכמות שנותרה
0	0
T	$R_0 \cdot q$
$2T$	$R_0 \cdot q^2$
$3T$	$R_0 \cdot q^3$
N	
nT	$R_0 \cdot q^n$



◀ נקבל סדרה הנדסית יורדת אשר מנתה q . כמות החומר לאחר n פרקי זמן תהיה לפיכך : $R_n = R_0 \cdot q^n$.

◀ אבל : $n = \frac{t}{T}$. כש : t הוא הזמן שחלף מאותו רגע בו לחצנו על שעון העצר. לכן נקבל : $R(t) = R_0 \cdot q^{\frac{t}{T}}$

תהליכי דעיכה - רקע מתימטי (3)



$$R(t) = R_0 \cdot q^{\frac{t}{T}}$$

◀ קיבלנו נוסחא :

R_0 = כמות החומר בתחילת מדידת הזמן.

t = הזמן שחלף מרגע תחילת המדידה. כלומר-הזמן בו הכמות היתה R_0 .

$R(t)$ = כמות החומר שנותרה לאחר זמן t

T = מירווח הזמן בו הכמות דועכת באחוז נתון קבוע.

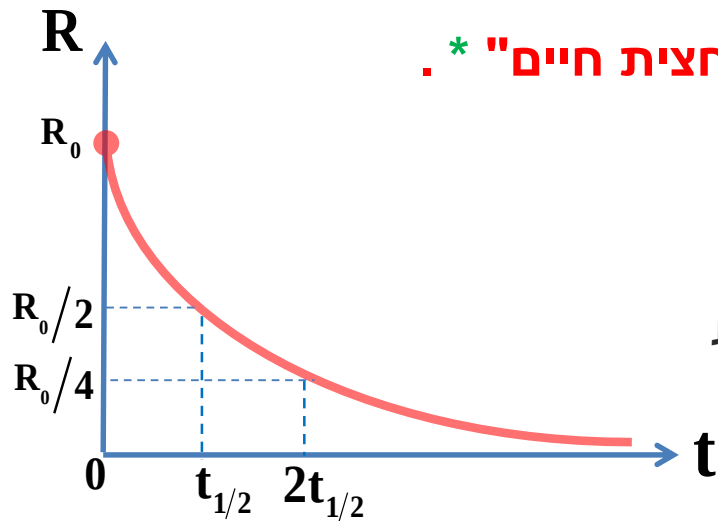
$q < 1$ = קבוע הדעיכה, כלומר החלק הנותר מהכמות לאחר כל מירווח זמן T .

תהליכי דעיכה - זמן מחצית חיים (1)

◀ נגדיר מושג חשוב מאוד ושימושי, בעל יחידות זמן בשם: **"זמן מחצית חיים" ***.

◀ נסמן מושג זה בסימון: $t_{1/2}$.

◀ משמעות:



בתהליך דעיכה שהוא, כאמור, תהליך אינסופי, יהיה רגע

בו הכמות תדעך לכדי מחצית מהכמות המקורית

שהיתה בזמן $t=0$.

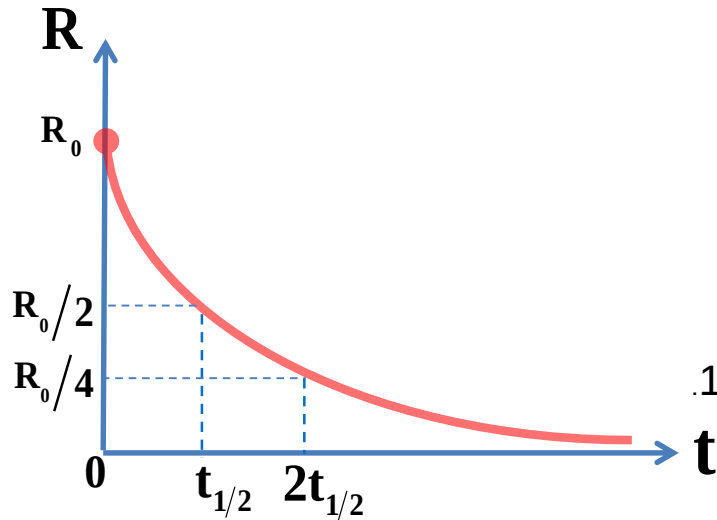
הזמן החולף מהרגע $t=0$ ועד רגע זה -נקרא בשם **"זמן מחצית החיים"**.

הגרף המצורף ממחיש את המושג.

* המושג "זמן מחצית חיים" שימושי מאוד בתחומים רבים. הוא מקנה תחושה אינטואיטיבית לגבי קצב

הדעיכה של החומר. לדוגמא: אם אדם נוטל גלולת שינה אשר זמן מחצית החיים שלה הוא 8 שעות-עליו לקחת לתשומת ליבו שכאשר יקיץ משנתו, נניח 8 שעות לאחר שנטל את הגלולה-עדיין קיים בדמו ריכוז של 50% חומר פעיל שעלול לפגוע בעירנותו במהלך היום.

תהליכי דעיכה - זמן מחצית חיים (2)



חישוב זמן מחצית החיים $t_{1/2}$.

ניעזר בנוסחת הדעיכה שפיתחנו :

$$R(t) = R_0 \cdot q^{\frac{t}{T}}$$

בזמן $t=0$ כמות החומר היא R_0 .

לאחר חלוף תקופה אחת של "מחצית חיים" כמות החומר היא $R_0/2$.

מכאן:

$$\frac{1}{2} R_0 = R_0 \cdot q^{\frac{t_{1/2}}{T}} \Rightarrow 2^{-1} = q^{\frac{t_{1/2}}{T}}$$

כעת נפעיל לוגריתם על שני האגפים. נבחר לוגריתם לפי בסיס טבעי (בסיס e), כלומר: $\log_e(x) = \ln(x)$.

נקבל:

$$\ln(2^{-1}) = \ln\left(q^{\frac{t_{1/2}}{T}}\right) \Rightarrow -\ln 2 = \frac{t_{1/2}}{T} \ln q \Rightarrow t_{1/2} = -\frac{\ln 2}{\ln q} \cdot T$$

שימו לב :

1. T הוא משך הזמן בו הכמות הנוותרת הינה פי q ($q < 1$) מהכמות שקדמה לה בתחילת אותו משך זמן.

2. q הוא שבר קטן מ-1. לכן $\ln q$ הינו מספר שלילי. משום כך זמן מחצית החיים יתקבל, כמובן, כמספר חיובי.

◀ בלון גז מכיל גז שמסתו ב $t=0$ היא $m_0=5\text{kg}$. עקב נקב בבלון הגז, פוחתת מסתו בשעור של 5 אחוזים בכל יממה.

א. מה תהיה מסת הגז בבלון לאחר 3 יממות ?

ב. מה תהיה מסת הגז בבלון לאחר 4.5 שעות ?

ג. כעבור כמה שעות תפחת מסת הגז לכדי מחצית מכמותה בזמן $t=0$?

ד. כעבור כמה שעות יכיל בלון הגז מסה של 1% או פחות ממסתו בזמן $t=0$?

פתרון סעיף א'.

מסת הגז בבולון לאחר 3 יממות ?

$$m(t) = m_0 \cdot q^{\frac{t}{T}}$$

נוסחת הדעיכה (הפעם הכמות R היא מסה לכן נסמנה ב m) :

$$m_0 = 5_{kg}$$

$$q = (100 - 5)\% = 95\% = 0.95$$

$$T = 1_{day}$$

$$t = 3_{days}$$

נציב ערכים מספריים ונקבל:

$$m(t) = m_0 \cdot q^{\left(\frac{t}{T}\right)} = 5_{kg} \cdot 0.95^{\left(\frac{3}{1}\right)} ; 2.57_{kg}$$

פתרון סעיף ב'.

מסת הגז בבולון לאחר 4.5 שעות ?

נוסחת הדעיכה :

$$m(t) = m_0 \cdot q^{\frac{t}{T}}$$

$$m_0 = 5_{kg}$$

$$q = (100 - 5)\% = 95\% = 0.95$$

$$T = 1_{(day)} = 24_{(hours)}$$

$$\frac{t}{T} = \frac{4.5_{(hours)}}{24_{(hours)}} = \frac{3}{16}$$

נציב ערכים מספריים ונקבל:

$$m(t) = m_0 \cdot q^{\left(\frac{t}{T}\right)} = 5_{kg} \cdot 0.95^{\left(\frac{3}{16}\right)} ; 4.95_{kg}$$

פתרון סעיף ג'.

כעבור כמה שעות תפחת מסת הגז לכדי מחצית מכמותה בזמן $t=0$?

מדובר ב: "זמן מחצית החיים". נסמן אותו ב: $t_{1/2}$.

נוסחת זמן מחצית החיים כפי שפיתחנו אותה בשקופית מספר (9):

$$t_{1/2} = - \frac{\ln 2}{\ln q} \cdot T$$
 כאשר:

$$q = (100 - 5)\% = 95\% = 0.95$$

נציב ערכים מספריים ונקבל:

$$t_{1/2} = - \frac{\ln 2}{\ln q} \cdot T = - \frac{\ln 2}{\ln(0.95)} \cdot 1_{(day)} ; 13.5_{(days)}$$

המשמעות המתימטית היא:

$$m_0 \cdot 0.95^{13.5} = \frac{1}{2} m_0$$

כעבור כמה שעות יכיל בלון הגז מסה של 1% או פחות ממסתו בזמן $t=0$?

הדרישה : $m(t) \leq 0.01m_0$ או : (1) $\frac{m(t)}{m_0} \leq 0.01$

נוסחת הדעיכה : $m(t) = m_0 \cdot q^{\frac{t}{T}}$ או : (2) $\frac{m(t)}{m_0} = q^{\frac{t}{T}}$

נציב את משוואה (2) באי שוויון (1) :

(3) $q^{\frac{t}{T}} \leq 0.01$

נפעיל לוגריתם טבעי על שני האגפים : (4) $\ln\left(q^{\frac{t}{T}}\right) \leq \ln(0.01)$ (האי-שוויון שומר על כיוונו. מדוע?)

(האי-שוויון הופך כיוון, מדוע?) (5) $\frac{t}{T} \ln\left(\underset{0.95}{q}\right) \leq \ln(0.01) \Rightarrow t \geq \frac{\ln(0.01)}{\ln(0.95)} T$ $\underset{1 \text{ day}}{T}$

נקבל: $t \geq 89.8_{(days)}$ (6) , כלומר לאחר **90 ימים** תיוותר בבלון הגז מסה הקטנה מאחוז אחד מהמסה ב $t=0$.

תהליכי דעיכה - קבוע הזמן (1)

◀ נגדיר מושג חשוב ושימושי נוסף, בעל יחידות זמן, הנקרא: **"קבוע הזמן"**.

◀ נסמן מושג זה בסימון: τ (אות יוונית הנקראת - טאו).

◀ משמעות (הגרף המצורף ממחיש את המושג):

בתהליך דעיכה שהוא כאמור, תהליך אינסופי, יהיה רגע

בו הכמות תדעך לכדי $\frac{1}{e}$ מהכמות המקורית שהיתה

בזמן $t=0$. הזמן החולף מהרגע $t=0$ ועד רגע זה -נקרא בשם **"קבוע זמן הדעיכה"**.

הוא משמש בעיקר כשמדובר במעגלי זרימה חשמליים כגון:

– טעינה ופריקה של קבל.

– מעגלי R-C-L (נגד-קבל-סליל).

– זרימת חום. ועוד..

◀ המושג דומה במשמעותו ל "זמן מחצית החיים" אלא שהוא מתאים יותר לתהליכים חשמליים/טרמיים

בשל הפשטות המתימטית המושגת ע"י המספר היסודי של החשבון הדיפרנציאלי/אינטגרלי - e .

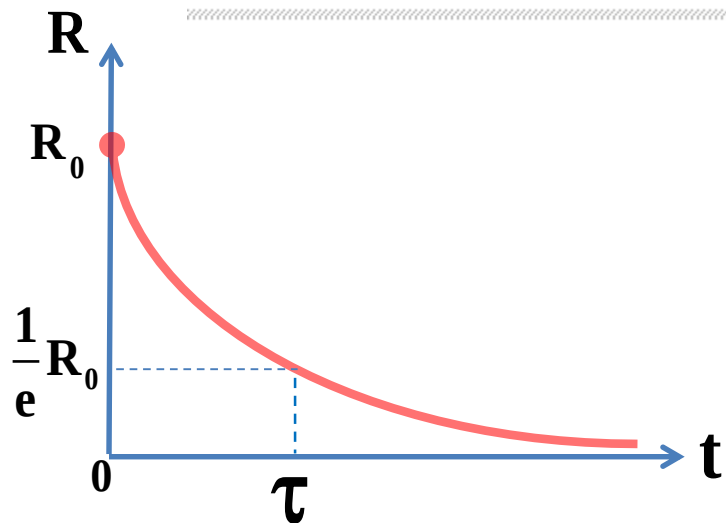
זיכרו כי: $e \approx 2.718$ ולכן: $\frac{1}{e} \approx 0.368 = 36.8\%$.

כלומר לאחר קבוע זמן אחד-תיוותר כמות המהווה כ 37% מהכמות ההתחלתית.

תהליכי דעיכה - קבוע הזמן (2)

◀ הצבת קבוע הזמן בנוסחת הדעיכה:

$$R(t) = R_0 \cdot q^{\frac{t}{T}} \quad \text{נוסחת הדעיכה (ראו שקופית (6)) :}$$



$$(1) \quad R(t) = R_0 \cdot q^{\frac{t}{\tau}} \quad \text{נחליף את } T \text{ ב } \tau :$$

$$(2) \quad R(t = \tau) = \frac{1}{e} R_0 \quad \text{בזמן } T = \tau :$$

$$(3) \quad R(t = \tau) = R_0 \cdot q^{\frac{\tau}{\tau}} = R_0 \cdot q \quad \text{אבל גם :}$$

$$(4) \quad q = \frac{1}{e} = e^{-1} \approx 0.37 \quad \text{ממשוואות (2) ו (3) נקבל :}$$

נציב בנוסחא (1) ונקבל :

$$R(t) = R_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

◀ במעגל זרימה פשוט המכיל סוללה ונגד, זורם זרם הדועך ב 2% בכל שניה (עקב התחממות הנגד).

ב : $t=0$ עצמת הזרם היא 10 אמפר.

א. חשבו את קבוע הזמן המיוחס לדעיכת הזרם.

ב. רשמו את נוסחת הדעיכה של הזרם באמצעות קבוע הזמן.

ג. כמה קבועי זמן יחלפו עד אשר עצמת הזרם תהיה 1% או פחות מעצמתו בזמן $t=0$?

ד. מה תהיה עצמת הזרם לאחר חלוף 100 שניות מהרגע $t=0$?

פתרון סעיף א'.

נוסחת הדעיכה :

$$i(t) = i_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$(1) \quad i(t=1_{\text{sec}}) = i_0 \cdot e^{-\frac{1}{\tau}} = 0.98 \cdot i_0 \quad \text{נציב :}$$

$$(2) \quad e^{-\frac{1}{\tau}} = 0.98 \quad \text{מכאן :}$$

$$(3) \quad \ln \left[e^{-\frac{1}{\tau}} \right] = \ln[0.98] \quad \text{"נוציא" לוגריתם טבעי משני האגפים :}$$

$$(4) \quad -\frac{1}{\tau} = \ln[0.98] \quad \text{נקבל :}$$

$$(5) \quad \tau = -\frac{1}{\ln[0.98]} \approx 45_{\text{sec}}$$

פתרון סעיף ב'.

נוסחת הדעיכה :

$$i(t) = i_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

נתון : $i_0 = 10_{amp}$

קיבלנו בסעיף א' : $\tau = 45_{sec}$

נציב בנוסחת הדעיכה ונקבל : $i(t) = 10 \cdot e^{-\frac{t}{45}}_{(amp)}$

פתרון סעיף ג'.

$$(1) \quad i(t) = i_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{נוסחת הדעיכה על פי סעיף ב' :}$$

$$(2) \quad i(t) \leq 0.01 \cdot i_0 \quad \text{הדרישה :}$$

$$(3) \quad i_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \leq 0.01 \cdot i_0 \quad \text{נציב את משוואה (1) באי שוויון (2) :}$$

$$(4) \quad -\frac{t}{\tau} \leq \ln(0.01) \quad \text{נפעיל לוגריתם טבעי על שני האגפים :}$$

$$(5) \quad t \geq -\tau \cdot \ln(0.01) \quad \text{נקבל :}$$

$$(6) \quad t \geq 4.6\tau \quad (\tau = 45_{\text{sec}}) \quad \text{ולבסוף :}$$

בתהליכי דעיכה נהוג להמתין חמישה קבועי זמן כדי שנוכל

להתייחס לכמות הנותרת כזניחה (פחות מאחוז אחד) .

פתרון סעיף ד'.



$$(1) \quad i(t) = i_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

נוסחת הדעיכה על פי סעיף ב' :

$$(2) \quad i(t = 100_{\text{sec}}) = 10_{\text{amp}} \cdot e^{-\frac{100}{45}}$$

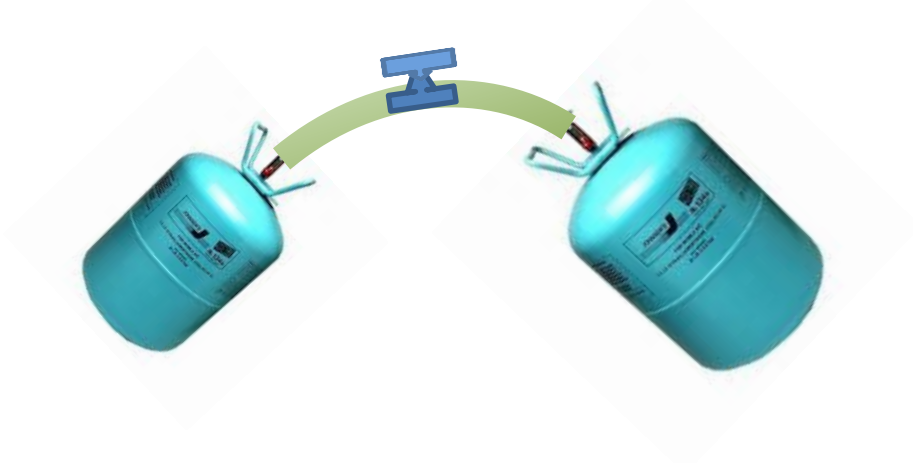
נציב ערכים מספריים :

$$(3) \quad i(t = 100_{\text{sec}}) = 1.08_{\text{amp}}$$

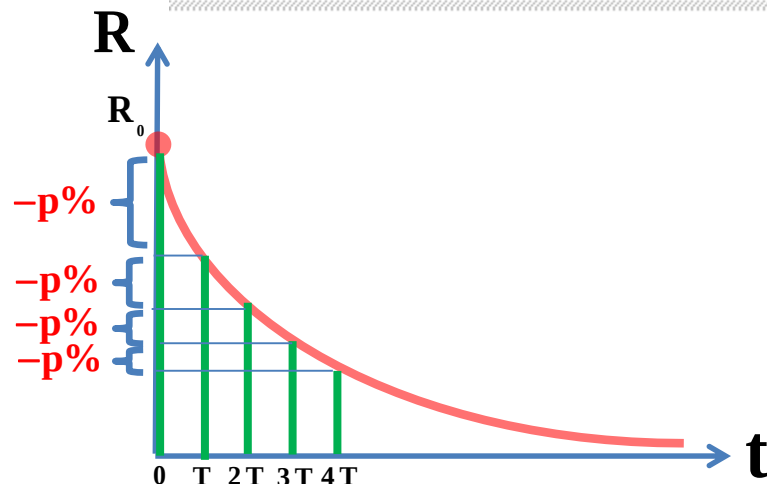
◀ תהליכי דעיכה:

תהליכים רבים בטבע ובטכנולוגיה הינם תהליכים אינסופיים אשר רמת הפעילות שלהם קטנה, בהדרגה עם חלוף הזמן. אך פעילות זו לעולם אינה מסתיימת.

דוגמא: שני בלוני גז קשיחים, מלאים בגז אך נמצאים בלחצים שונים :



תהליכים דומים: דיפוזיה, אוסמוזה, התפרקות רדיו-אקטיבית ספונטאנית, מעברי חום, טעינה ופריקה של קבל ועוד...



◀ נוסחת הדעיכה :

$$R(t) = R_0 \cdot q^{\frac{t}{T}}$$

R_0 = כמות החומר בתחילת מדידת הזמן.

t = הזמן שחלף מרגע תחילת המדידה. כלומר-הזמן בו הכמות היתה R_0 .

$R(t)$ = כמות החומר שנותרה לאחר זמן t

T = מירווח הזמן בו הכמות דועכת באחוז נתון קבוע.

$q < 1$ = קבוע הדעיכה, כלומר החלק הנותר מהכמות לאחר כל מירווח זמן T .

"זמן מחצית חיים" ◀

נסמן מושג זה בסימון: $t_{1/2}$.

משמעות:

בתהליך דעיכה שהוא, כאמור, תהליך אינסופי, יהיה רגע

בו הכמות תדעך לכדי מחצית מהכמות המקורית

שהיתה בזמן $t=0$.

הזמן החולף מהרגע $t=0$ ועד רגע זה נקרא בשם "זמן מחצית החיים".

הגרף המצורף ממחיש את המושג.

$$t_{1/2} = - \frac{\ln 2}{\ln q} \cdot T$$

q מהווה את החלק היחסי (מבוטא כשבר קטן מ-1) של הכמות שנותרה לאחר כל פרק זמן שרירותי **T**.

(לדוגמא- אם: $q = \frac{3}{4}$: $T = 5_{\text{sec}}$ אזי בתום כל 5 שניות הכמות הנותרת היא שלושה רבעים מהכמות

שהיתה לפני אותן 5 שניות.

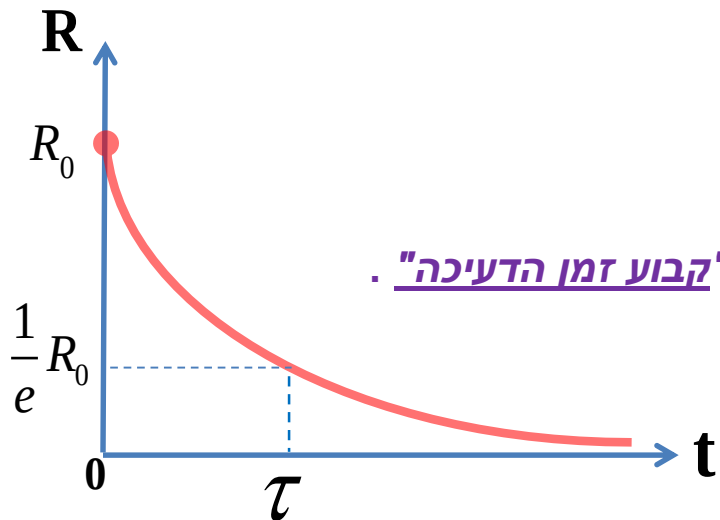
◀ קבוע הזמן (τ) .

◀ משמעות (הגרף המצורף ממחיש את המושג) :

בתהליך דעיכה שהוא, כאמור, תהליך אינסופי, יהיה רגע

בו הכמות תדעך לכדי $\frac{1}{e}$ מהכמות המקורית שהיתה

בזמן $t=0$. הזמן החולף מהרגע $t=0$ ועד רגע זה -נקרא בשם "קבוע זמן הדעיכה".



זיכרו כי : $e \approx 2.718$ ולכן : $\frac{1}{e} \approx 0.368 = 36.8\%$.

כלומר לאחר קבוע זמן אחד-תיוותר כמות המהווה כ 37% מהכמות ההתחלתית.

$$R(t) = R_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$