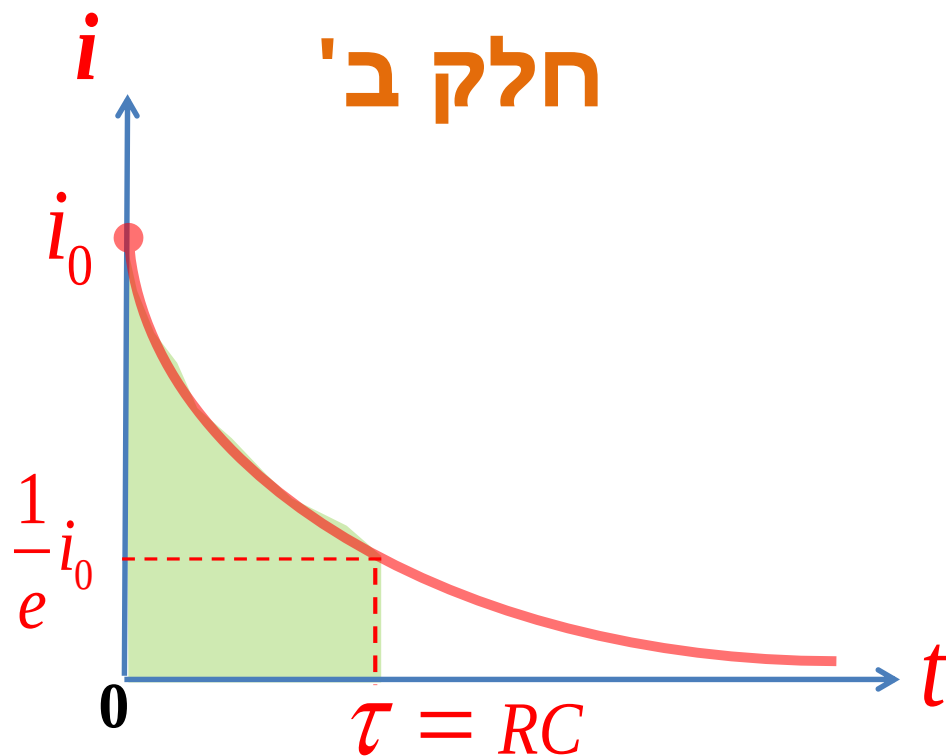


חשמל מעגלי-RC חלק ב'



◀ טעינה ופריקה של קבל:

– הסבר כללי.

◀ טעינת קבל:

– פיתוח נוסחאות זרם ומטען כתלות בזמן.

– חישוב קבוע הזמן:

• על פי הגדרה מתימטית.

• על פי הגדרה פיסיקלית.

– **גרפים :**

• הזרם כתלות בזמן.

• המטען כתלות בזמן.

• המתח על הקבל.

• המתח על הנגד.

• ההספק על הנגד.

• הספק המקור.

• תוספת האנרגיה של הקבל ליחידת זמן (הספק

הקבל).

◀ פריקת קבל:

– הסבר כללי.

– פיתוח נוסחאות הזרם והמטען.

– גרפים :

• הזרם כתלות בזמן.

• המטען כתלות בזמן.

– **נספחים :**

א- פיתוח מתימטי פורמלי של מעגל

טעינה (משוואה דיפרנציאלית).

ב- הוכחת התאימות בין ההגדרה

המתימטית לבין ההגדרה הפיסיקלית

של קבוע הזמן

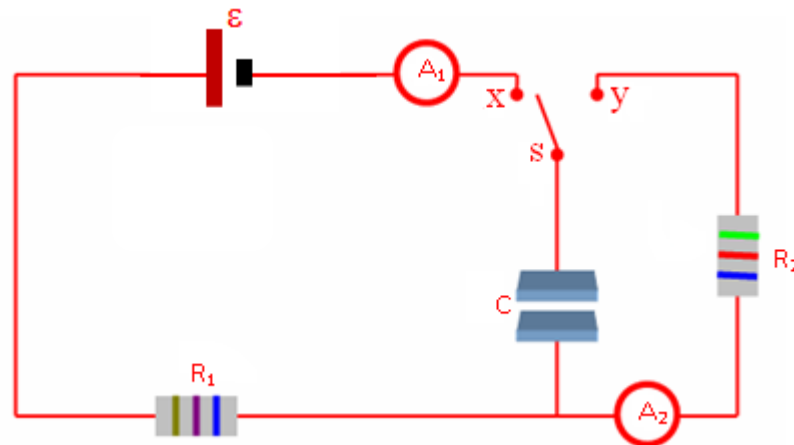
◀ זהו מקרה פרטי של תהליך דעיכה כפי שנסביר בהמשך...

◀ נתבונן במעגל חשמלי המכיל מקור מתח קבוע (סוללה) + קבל + נגד. מעגל כזה נקרא : **מעגל R-C**.

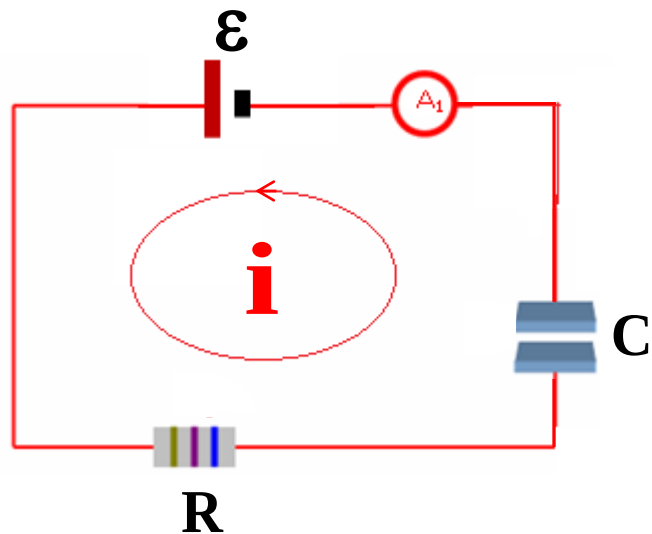
◀ כאשר המתג S מחובר ל x המעגל הינו מעגל טעינה של הקבל.

(נתייחס לנגד R_1 כמכיל גם את ההתנגדות הפנימית של הסוללה).

◀ כאשר המתג S מחובר ל y המעגל הינו מעגל פריקה של הקבל (הקבל נפרק דרך הנגד R_2).



◀ המעגל החשמלי מכיל :



1. סוללה בעלת כא"מ $\mathcal{E}$.

2. נגד R .

נתייחס להתנגדות הנגד ככוללת גם אם ההתנגדות הפנימית של הסוללה.

3. קבל שקיבולו C .

הסבר :

במעגל המתואר נוצר זרם הדועך עם הזמן.

הקבל נטען במטען הולך וגדל ולכן גם המתח על הקבל $V_C(t)$ הולך וגדל.

סכום המתחים (על הקבל והנגד יחדיו) הינו קבוע ומקיים : $V_R(t) + V_C(t) = \mathcal{E}$.

המתח על הנגד : $V_R(t) = \mathcal{E} - V_C(t)$ הולך וקטן.

ומשום כך-הזרם במעגל (שהוא גם הזרם דרך הנגד) : $i_R = \frac{V_R(t)}{R}$ דועך.

א. טעינת קבל (2)

ב $t=0$ הקבל ריק והפרש הפוטנציאלים עליו הוא אפס. לפיכך הקבל מהווה קצר ברגע זה.

התנגדות האמפרמטר-זניחה.

מכאן נובע- זרם הפתיחה :

$$(1) \quad i(t=0) = i_o = \frac{\mathcal{E}}{R}$$

נרשום את משוואת המעגל החשמלי בזמן t כלשהו :

$$(2) \quad \mathcal{E} = V_R(t) + V_C(t)$$

כלומר :

$$(3) \quad \mathcal{E} = i(t) \cdot R + \frac{q(t)}{C}$$

משוואה זו נקראת-משוואה דיפרנציאלית (נמצאים בה, בכפיפה אחת גם מטען הקבל

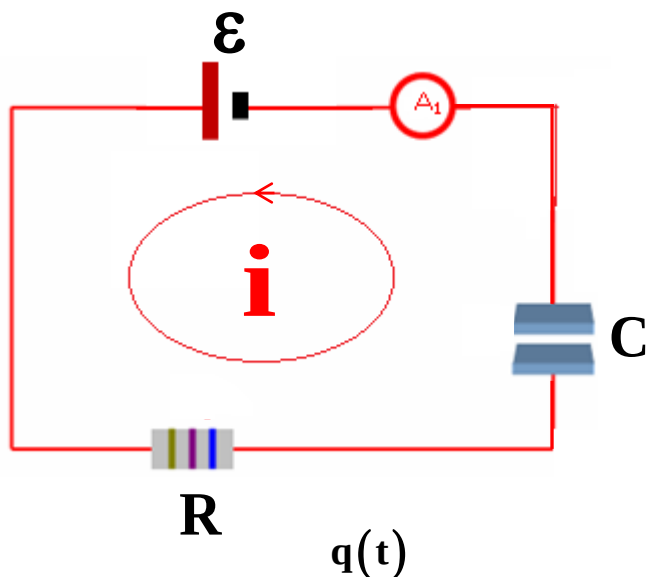
וגם הזרם הטוען אותו המוגדר כנגזרת, לפי הזמן, של המטען).

(פתרונה הפורמלי של משוואה זו חורג ממסגרת לימודינו אך למתעניינים-הוא מופיע בנספח א').

פתרון המשוואה כפוף לפתרון כל משוואות הדעיכה מסוג זה שהוא : $(3) \quad i(t) = i_o \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$

פיתוח פשוט של נוסחא זו (ללא משוואות דיפרנציאליות) - מופיע בחלק א' של המצגת).

τ הוא קבוע הזמן (ראו הסבר בשקופית הבאה).



א. טעינת קבל (3)

◀ נציב את זרם הפתיחה ממשוואה (1) בנוסחת הזרם (3) ונקבל:

$$(3) \quad i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

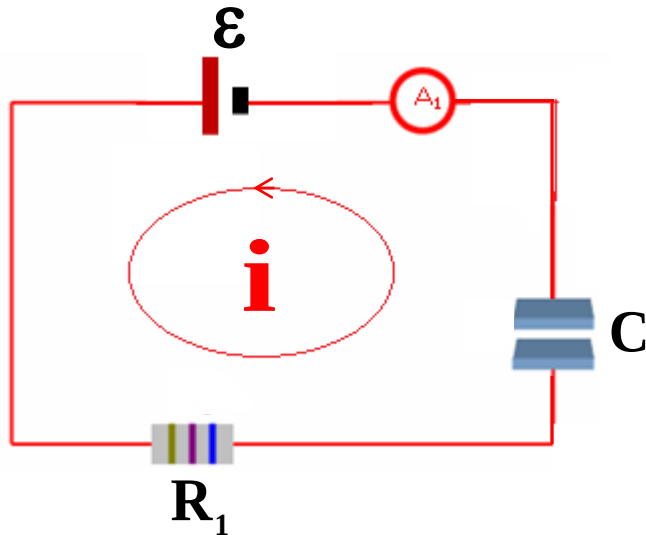
◀ נרשום שוב את משוואה (2)

$$(2) \quad \mathcal{E} = i(t) \cdot R + \frac{q(t)}{C}$$

◀ נציב את הזרם ממשוואה (3) במשוואה (2) ונקבל:

$$(4) \quad \mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}}{R} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot R + \frac{q(t)}{C}$$

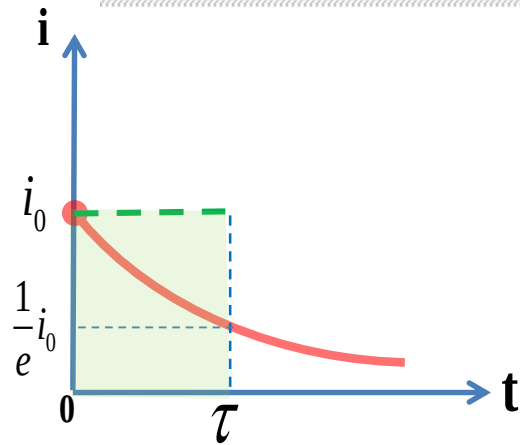
$$(6) \quad q(t) = \mathcal{E}C \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$



א. טעינת קבל - קבוע הזמן

◀ הגרף המתאר את עצמת הזרם כתלות בזמן בתהליך טעינת הקבל

(וכפי שנראה בהמשך-גם בתהליך הפריקה שלו), נראה כך :



◀ נגדיר מושג חשוב ושימושי, בעל יחידות זמן, הנקרא : **"קבוע הזמן"**.

נסמן מושג זה בסימון : τ (אות יוונית הנקראת - טאו). ניתן להגדיר את קבוע הזמן בשני אופנים :

הגדרה פיסיקלית

אילו הזרם היה קבוע ושווה לזרם ההתחלתי בזמן $t=0$ ($i_0 = \frac{\mathcal{E}}{R}$) , אזי הקבל היה נטען במלואו (למטען סופי : $q_{final} = \mathcal{E}C$) בזמן $t = \tau$ והזרם היה מתאפס בזמן זה. המטען הסופי של הקבל מבוטא בגרף דלעיל באמצעות "השטח" הצבוע **בירוק**.
הוכחת תאימות בין שתי ההגדרות מופיעה בנספח ב'.

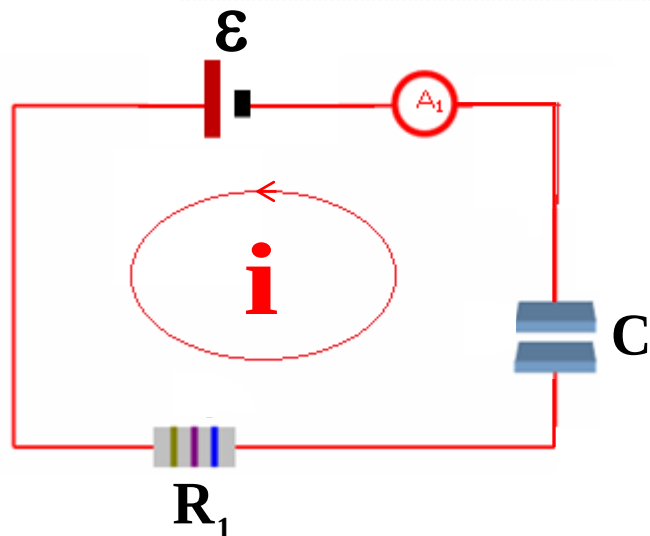
הגדרה מתימטית

תהליך דעיכה שהוא, כאמור, תהליך אינסופי, יהיה רגע בו הזרם ידעך לכדי $\frac{1}{e}$ מזרם הפתיחה i_0 . הזמן החולף מהרגע $t=0$ ועד רגע זה נקרא בשם **"קבוע זמן הדעיכה"**. (ראו גרף דלעיל).

זיכרו כי: $e \approx 2.718$ הוא המספר היסודי של החשבון הדיפרנציאלי/אינטגרלי ולכן : $\frac{1}{e} \approx 0.368 = 36.8\%$
כלומר לאחר קבוע זמן אחד הזרם יהווה כ 37% מזרם הפתיחה.

א. טעינת קבל - חישוב קבוע הזמן τ על פי ההגדרה המתימטית:

◀ קיבלנו:



– הזרם:

$$(a) \quad i(t) = \frac{\varepsilon}{R} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

– המטען:

$$(b) \quad q(t) = \varepsilon C \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

כזכור מחשמל זרימה-הזרם מוגדר כנגזרת לפי הזמן של המטען. לפיכך-נגזור את משוואה (b) לפי t ונשווה

את תוצאת הנגזרת למשוואה (a):

1. נגזרת של משוואה (b):

$$(c) \quad \frac{dq}{dt} = \varepsilon C e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot \frac{1}{\tau} = \frac{\varepsilon C}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

2. נשווה למשוואה (a):

$$(d) \quad \frac{\cancel{\varepsilon} C}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{\cancel{\varepsilon}}{R} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \Rightarrow \tau = RC$$

$$\tau = RC$$

מאחר והשוויון נכון לכל t הפתרון הוא כללי.

א. טעינת קבל - חישוב קבוע הזמן τ על פי ההגדרה הפיסיקלית :

נתייחס למצב היפוטטי בו הזרם היה קבוע לאורך כל זמן הטעינה או הפריקה של הקבל.

במקרה זה היה הקו הירוק המקווקו בגרף הזרם המוצג להלן מתאר את הזרם.

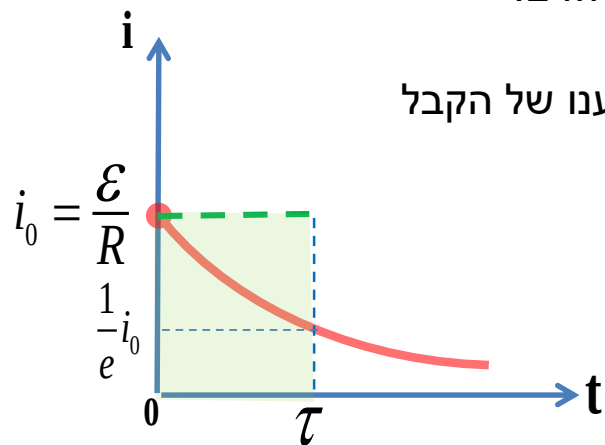
"שטח המלבן" מתחת לגרף הזרם "הקבוע כביכול" מאפיין כמובן את מטענו של הקבל

כאשר הוא טעון במלואו. מטען זה הוא : $q_{final} = \mathcal{E}C$.

ההגדרה הפיסיקלית של קבוע הזמן היא כדלקמן:

" אילו זרם הטעינה של הקבל היה קבוע ושווה לערכו ההתחלתי

בזמן $t=0$ אזי הקבל היה נטען במלואו לאחר קבוע זמן אחד. (כלומר ב $t = \tau$)".



לפיכך : $\frac{\mathcal{E}}{R} \cdot \tau = \mathcal{E}C$

כלומר : $\tau = RC$

$$\tau = RC$$

◀ יחידות S.I של קבוע הזמן τ :

$$[\tau] = [\Omega][F]$$

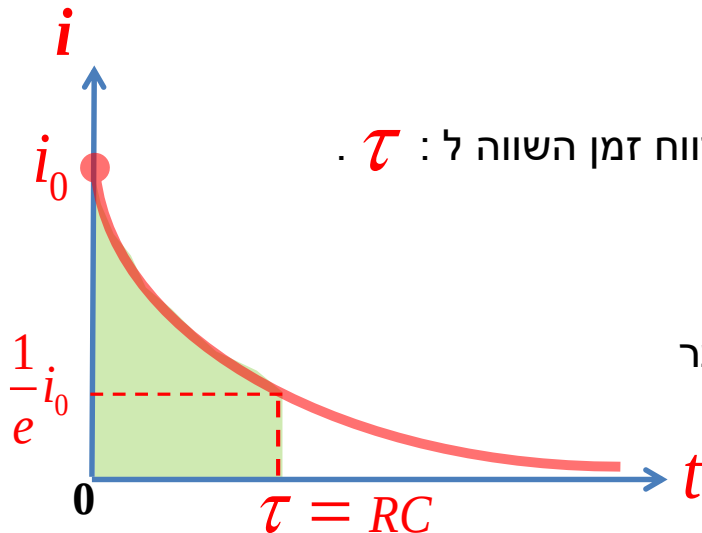
$$[\tau] = \left[\frac{V}{A} \right] \left[\frac{C}{V} \right]$$

$$[\tau] = \left[\frac{1}{\cancel{A}} \right] \left[\frac{\cancel{A} \times S}{1} \right] = [S]$$

1. הזרם במעגל הטעינה :

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

א. זרם הפתיחה הוא $i_0 = \frac{\mathcal{E}}{R}$ הזרם דועך פי $\frac{1}{e}$ בכל מירווח זמן השווה ל: τ .



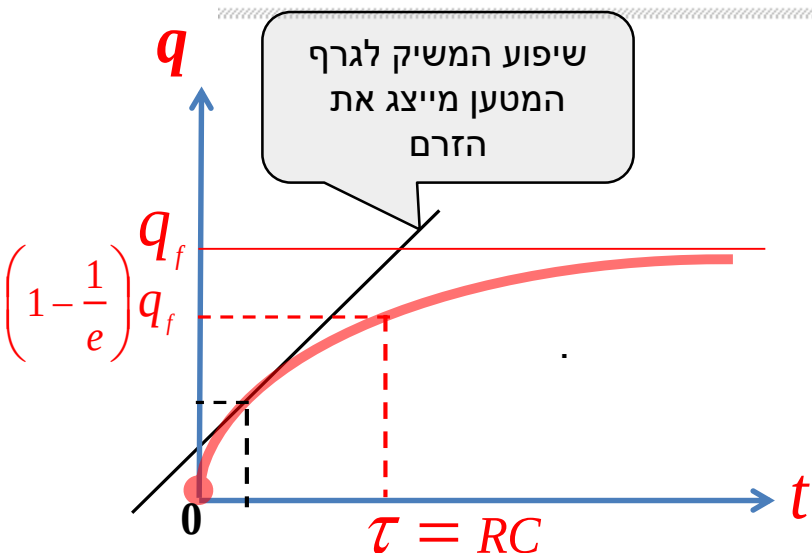
ב. ה "שטח" (הירוק) מתחת לגרף מייצג את המטען המצטבר על הקבל עד אותו רגע. באיור-זהו המטען המצטבר עד חלוף קבוע זמן אחד.

ג. ה"שטח" הכולל מתחת לגרף, כלומר עד זמן אינסופי מייצג את המטען הכולל המצטבר על הקבל בטעינה "מלאה".

מטען זה שווה ל: $q_{final} = q_f = \mathcal{E}C$.

ד. הטעינה נחשבת ל "מלאה מעשית" לאחר **חמישה קבועי זמן**.

בזמן זה הזרם דועך לכדי פחות מאחוז אחד מזרם הפתיחה (**הוכיחו זאת**) ולכן נחשב כזניח.



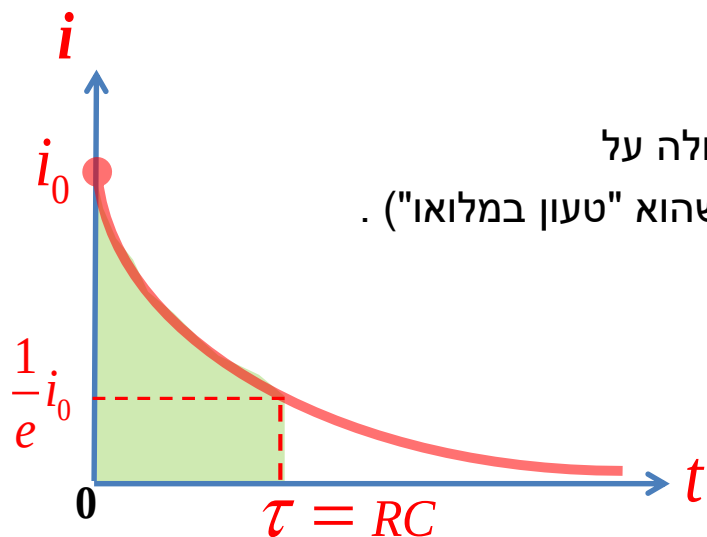
2. מטען הקבל במעגל טעינה : $q(t) = \mathcal{E}C \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$

א. גרף המטען מופיע מעל גרף הזרם לצורך השוואתי.

ב. המטען על הקבל מצטבר בהדרגה עד

הגיעו מעשית ל "ערך הסופי" : $q_f = \mathcal{E}C$

ג. לאחר חמישה קבועי זמן 5τ צובר הקבל מטען העולה על 99% מ"המטען הסופי" (ונוכל על פי הסכמה לומר שהוא "טעון במלואו").

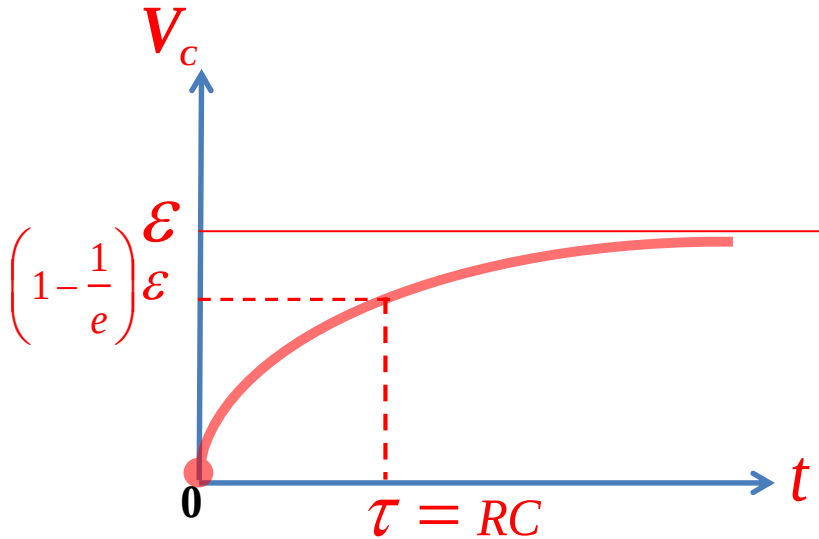


ד. לאחר קבוע זמן אחד צובר הקבל : $\left(1 - \frac{1}{e} \right) q_f$ שהם כ-63% ממטענו הסופי של

הקבל. (מיוצג ע"י ה"שטח" הירוק),

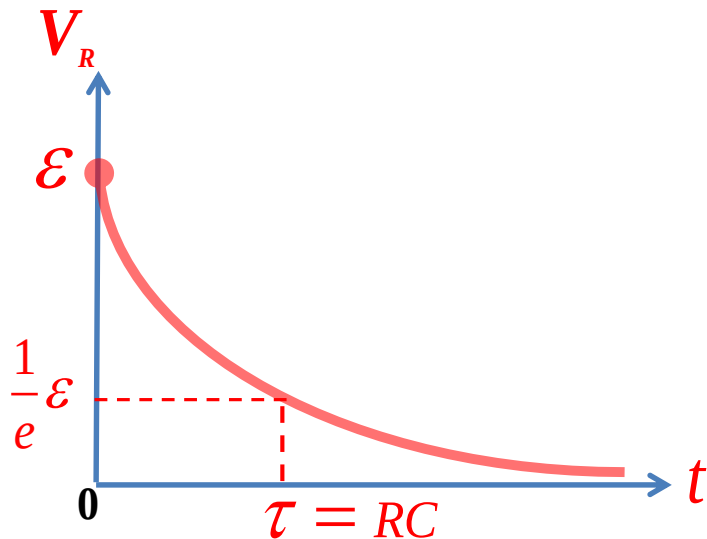
והזרם יהווה : $\frac{1}{e} i_0$ שהוא כ-34% מזרם הפתיחה.

3. המתח על הקבל :



$$V(t) = \frac{q(t)}{C} = \mathcal{E} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

4. המתח על הנגד :



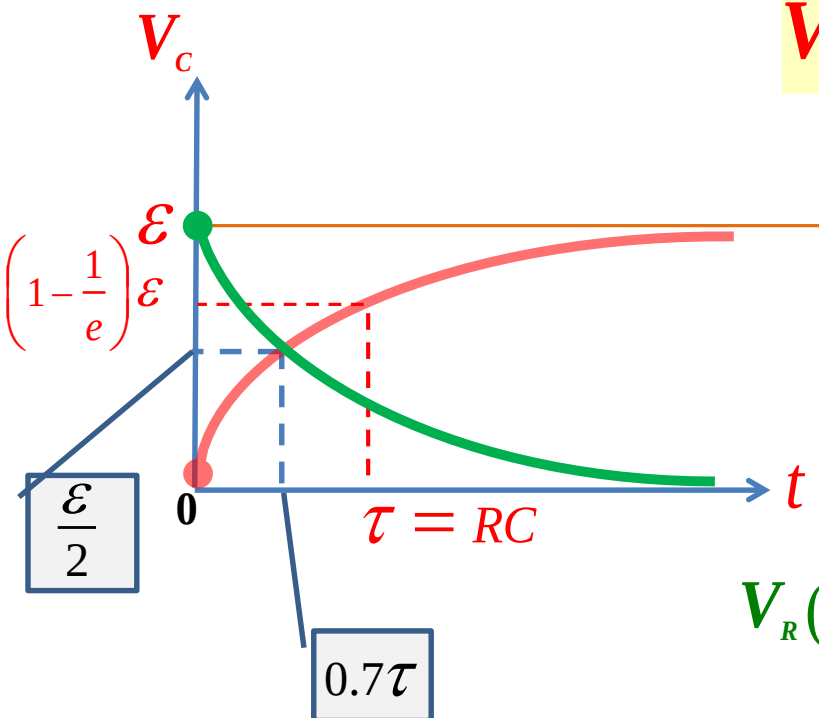
$$V_R = i(t) \cdot R = \mathcal{E} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

3. מתחים :

המתח על הקבל (אדום) : $V_C(t) = \frac{q(t)}{C} = \mathcal{E} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$

המתח על הנגד (ירוק) : $V_R(t) = i(t) \cdot R = \mathcal{E} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$

ברור שמתקיים בכל זמן שהוא : $V_C(t) + V_R(t) = \mathcal{E}$



◀ הזמן בו המתח על הקבל שווה למתח על הקבל
הוא הזמן בו המתח על כל אחד מהם יהיה $\frac{\mathcal{E}}{2}$.

על פי פונקצית המתח על הנגד :

$$V_R(t) = \mathcal{E} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{\mathcal{E}}{2} \Rightarrow e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{1}{2} \Rightarrow t = \ln 2 \cdot \tau \approx 0.7\tau$$

$$p_R(t) = i^2(t) \cdot R = \left(\frac{\mathcal{E}}{R} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \right)^2 \cdot R = \frac{\mathcal{E}^2}{R} \cdot e^{-\frac{2t}{\tau}}$$

6. ההספק על הנגד:

א. אנרגיית הקבל לאחר טעינה מלאה היא : $U_C = \frac{1}{2} C \mathcal{E}^2$. (ראו פרק הקיבול)

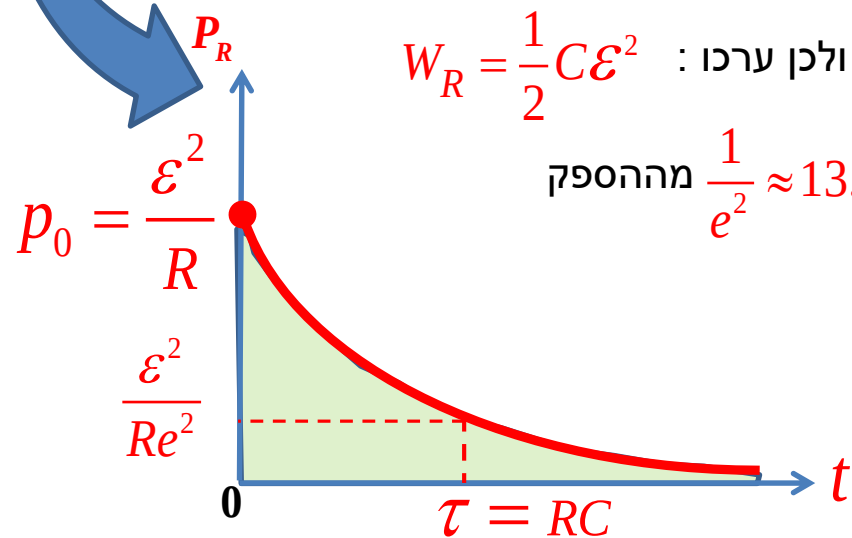
ב. עבודת מקור המתח הינה כפולה מאנרגיית הקבל, לכן בטעינה מלאה היא : $W_\mathcal{E} = C \mathcal{E}^2$

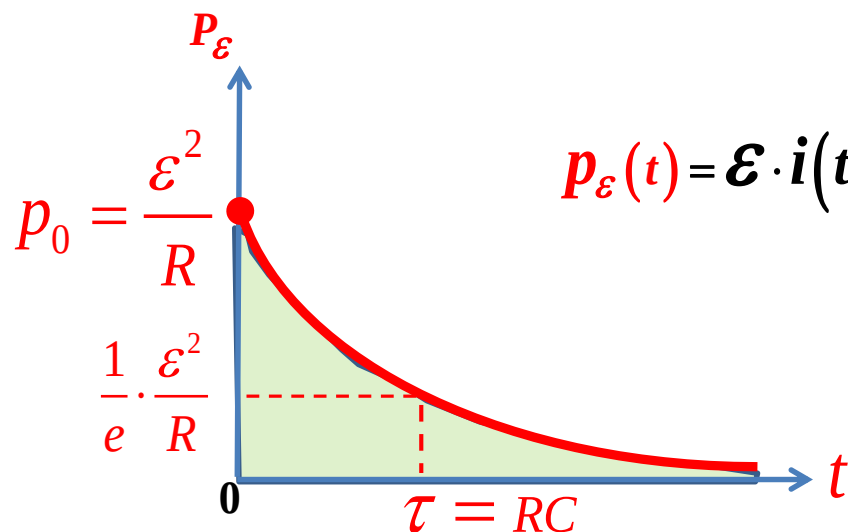
ג. ה"שטח" הכולל מתחת לגרף ההספק על הנגד (ה"שטח" הירוק) מייצג את כמות החום

המתפתחת בנגד. ערך זה הוא מחצית מעבודת המקור ולכן ערכו : $W_R = \frac{1}{2} C \mathcal{E}^2$

ד. לאחר כל קבוע זמן, דועך ההספק על הנגד לכדי : $\frac{1}{e^2} \approx 13.5\%$ מההספק

שהיה לפני אותו קבוע זמן.





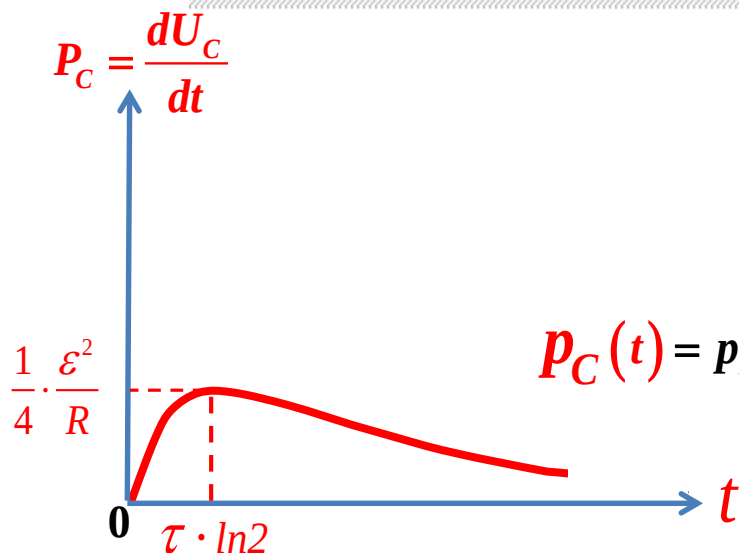
$$p_\epsilon(t) = \mathcal{E} \cdot i(t) = \mathcal{E} \left(\frac{\mathcal{E}}{R} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \right) = \frac{\mathcal{E}^2}{R} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

7. הספק המקור:

א. לאחר כל קבוע זמן, דועך הספק המקור לכדי : $\frac{1}{e} \approx 36.7\%$ מההספק שהיה לפני אותו קבוע זמן.

ב. ה"שטח" הכולל מתחת לגרף ההספק על הנגד (ה"שטח" הירוק) מייצג את עבודת המקור בתהליך הטעינה כולו.

* א. טעינת קבל-גרף תוספת אנרגיה הקבל ליחידת זמן



8. הספק הקבל (תוספת האנרגיה של הקבל ליחידת זמן) :

$$p_C(t) = p_\epsilon - p_R = \frac{\epsilon^2}{4R} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} - \frac{\epsilon^2}{4R} \cdot e^{-\frac{2t}{\tau}} = \frac{\epsilon^2}{R} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

P_ϵ P_R

א. קצב השינוי באנרגיית הקבל הוא מקסימלי כאשר : $t = \tau \cdot \ln 2 = RC \cdot \ln 2$

בזמן זה קצב השינוי מהווה רבע מהספק המקור בתחילת הטעינה. (אתם מוזמנים להוכיח זאת).

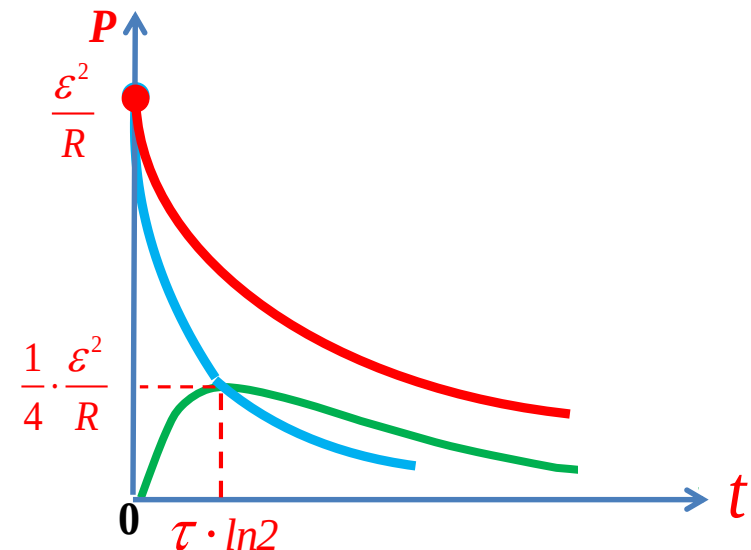
ב. בזמן זה ($t = \tau \cdot \ln 2$) הספק המקור הוא $\frac{1}{2} \cdot \frac{\epsilon^2}{R}$ ראו פונקציה (1), ולכן ברגע זה קצב השינוי באנרגיית

הקבל $\frac{1}{4} \cdot \frac{\epsilon^2}{R}$ מהווה חצי מהספק המקור באותו רגע.

ג. את המחצית השניה של הספקו באותו רגע מוסר המקור לנגד. כלומר ברגע זה : $p_C = p_R$.

ד. השטח הכולל, מתחת לגרף הספק הקבל, מייצג את האנרגיה הכוללת של הקבל בתום תהליך הטעינה.

9. כל הגרפים המייצגים את ההספקים השונים על אותה סקלה:



1. באדום: הספק המקור :

$$p_{\varepsilon}(t) = \frac{\varepsilon^2}{R} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

2. בכחול: ההספק על הנגד :

$$p_R(t) = \frac{\varepsilon^2}{R} \cdot e^{-\frac{2t}{\tau}}$$

3. בירוק: קצב שינוי האנרגיה של הקבל :

$$p_C(t) = \frac{\varepsilon^2}{R} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

לכל t מתקיים :

$$P_{\varepsilon}(t) = P_C(t) + P_R(t)$$

ב. פריקת קבל - זרם הפריקה

ב $t=0$ הקבל מלא במטען $q = \epsilon C$ שכן הוא נטען לפני כן ע"י סוללה בעלת כ"מ ϵ .

נרשום את משוואת המעגל החשמלי בזמן t כלשהו : $-\frac{q(t)}{C} + iR = 0 \Rightarrow -V_C(t) + i(t)R = 0$ (1)

אלא שהזרם כאן הוא זרם פריקה. כלומר $i = -\frac{dq}{dt}$.

ולכן : $-\frac{q(t)}{C} - \frac{dq}{dt}R = 0$ (2)

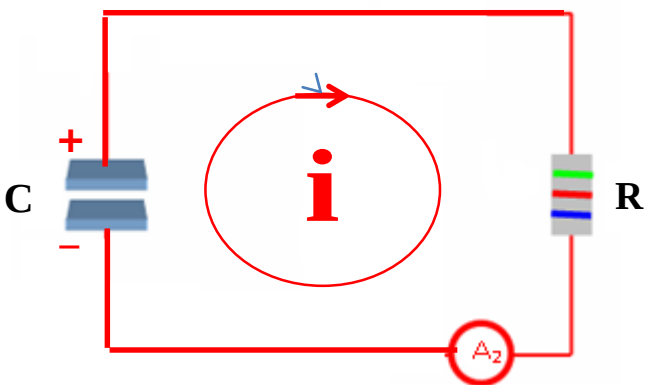
$$(3) \quad \frac{dq}{q} = -\frac{dt}{RC}$$

פתרון המשוואה כפוף לפתרון כל משוואות הדעיכה מסוג זה שהוא (הפיתוח מופיע במצגת חלק א') שימו לב לכך

שזרם הפריקה זורם במגמה הפוכה לזרם הטעינה. הפונקציה המתארת את **עוצמת** הזרם :

$$(4) \quad i(t) = \underbrace{i_0}_{\substack{RC=\tau \\ \frac{\epsilon}{R}}} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{\epsilon}{R} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

ב. פריקת קבל-מטען הקבל



◀ נציב את i מפונקציה (4) :

$$(4) \quad i(t) = \frac{\varepsilon}{R} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

בפונקציה (1) :

$$(2) \quad -\frac{q(t)}{C} + \frac{\varepsilon}{R} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = 0$$

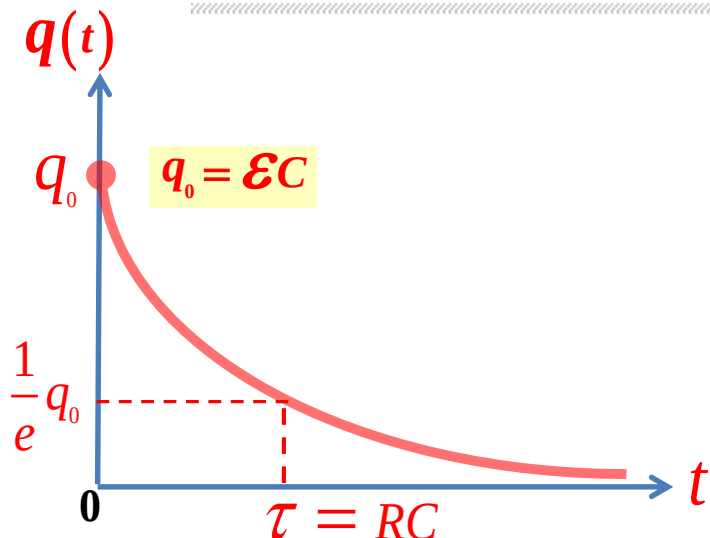
ונקבל :

$$(5) \quad -\frac{q(t)}{C} + \frac{\varepsilon}{R} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = 0$$

◀ נחלץ את q ונקבל את פונקצית המטען כתלות בזמן :

$$(6) \quad q(t) = \underbrace{q_0}_{\varepsilon C} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

ב. פריקת קבל - התיאור הגרפי של הזרם וש מטען הקבל



$$q(t) = \underbrace{\mathcal{E}C}_{q_0} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{מטען הקבל במעגל פריקה :}$$

$$i(t) = \underbrace{\frac{\mathcal{E}}{R}}_{i_0} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{הזרם במעגל הפריקה :}$$

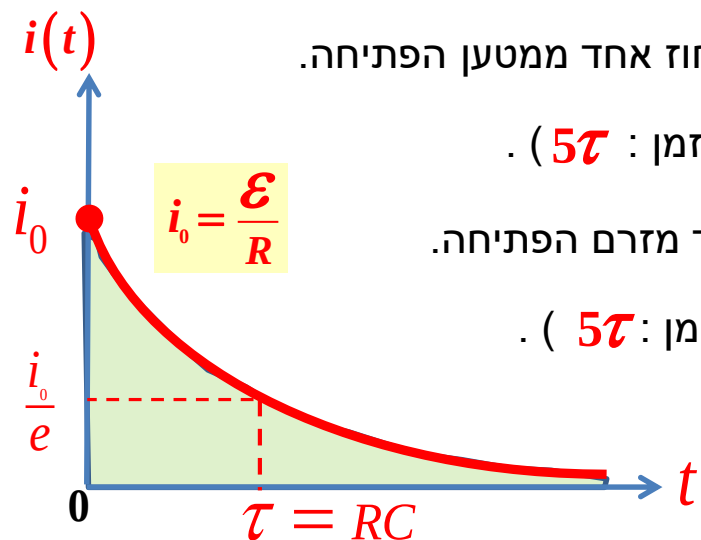
א. גרף המטען מופיע מעל גרף הזרם לצורך השוואתי.

ב. המטען על הקבל מתרוקן בהדרגה עד הגיעו לפחות מאחוז אחד ממטען הפתיחה.

כאשר אז הוא נחשב לזניח. (וזאת לאחר חמישה קבועי זמן : 5τ).

ג. הזרם במעגל קטן בהדרגה עד הגיעו לפחות מאחוז אחד מזרם הפתיחה.

כאשר אז הוא נחשב לזניח. (וזאת לאחר חמישה קבועי זמן : 5τ).

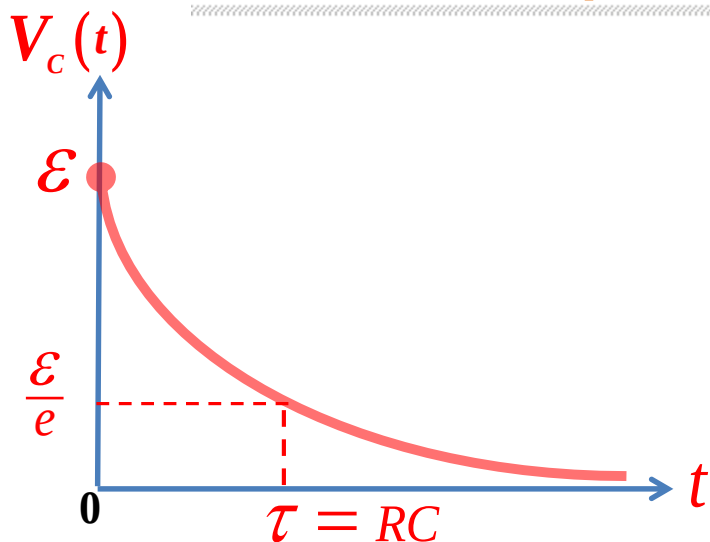


ד. ה"שטח" מתחת לגרף הזרם (ה"שטח" הירוק)

מייצג את מטען הקבל לפני פריקתו.

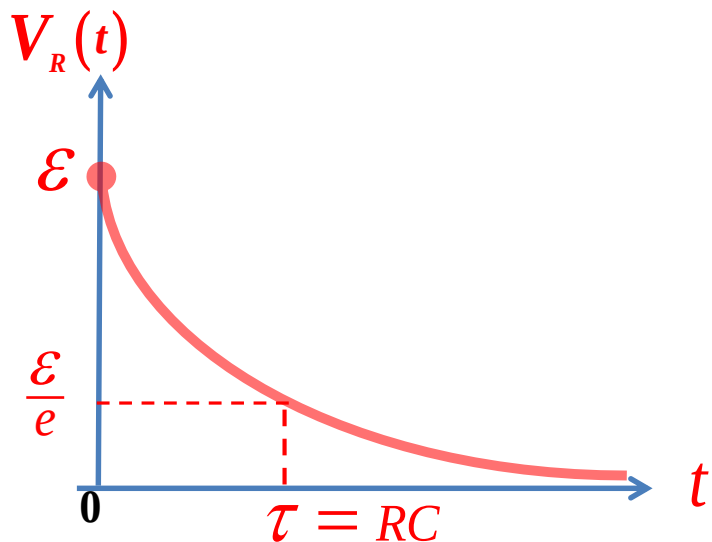
ב. פריקת קבל - תיאור גרפי של המתח על הקבל ועל הנגד

גרפים :



מתח הקבל במעגל פריקה :

$$V_C(t) = \mathcal{E} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

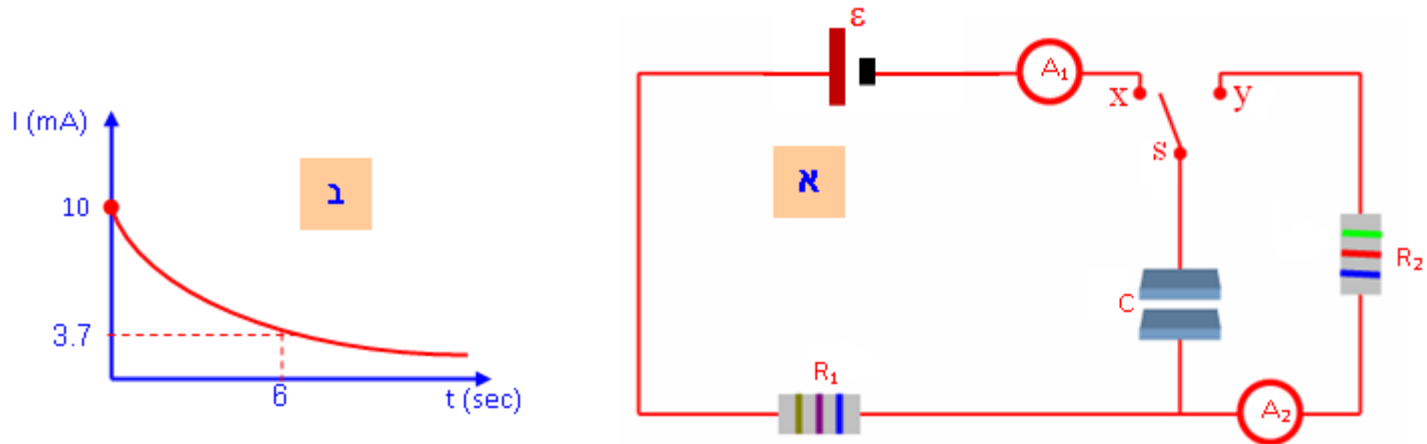


המתח על הנגד במעגל פריקה :

$$|V_R(t)| = \mathcal{E} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

מאחר והנגד מחובר במקביל לנגד- המתח על שניהם שווה לכל t .

בתרשים א' מתואר מעגל חשמלי שבנתה תלמידה. המעגל כולל מקור מתח אידיאלי שהכא"מ שלו $10V$, קבל שקיבולו C , נגד שהתנגדותו $R_1=1000\Omega$, נגד שהתנגדותו $R_2=2000\Omega$ ומדי זרם שהתנגדותם ניתנת להזנחה. התלמידה טענה את הקבל (קצה המפסק נגע ב- x), ולאחר מכן פרקה את הקבל (קצה המפסק נגע ב- y – ראה תרשים א').



תרשים ב' שלפניך מתאר גרף של I כפונקציה של t , אותו שרטטה התלמידה בהתאם למדידות הזרם שביצעה.

א. האם הגרף שבתרשים ב' עשוי להתאים לזרם שנימדד ע"י מד-הזרם A_1 , או לזרם שנימדד ע"י מד-הזרם A_2 ? נמקו.

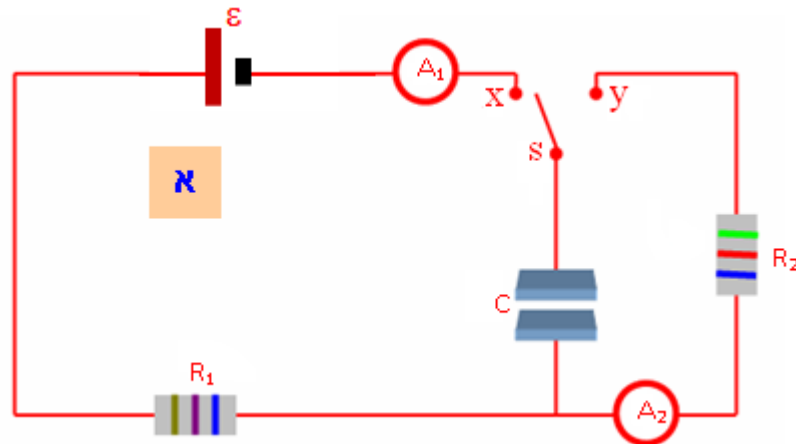
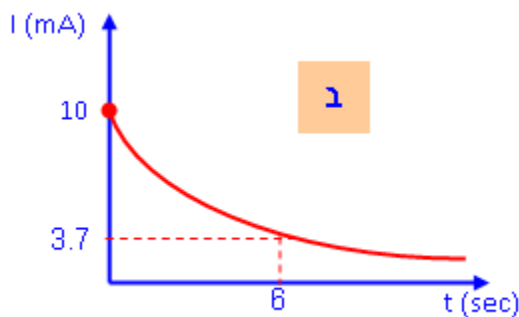
ב. חשבו את קיבול הקבל C .

ג. ששרטטו גרף מקורב של הזרם בתלות בזמן עבור מד-הזרם שאינו מתואר בגרף הנתון.

ד. מהי כמות החום המשתחררת בנגד R_2 בתהליך הפריקה של הקבל? האם כמות חום זו תלויה בהתנגדותו של הנגד R_2 ?

ה. מהי כמות החום המשתחררת בנגד R_2 , אם לאחר שהתלמידה טענה את הקבל היא ניתקה אותו מהמעגל, הקטינה

פי שניים את המרחק בין לוחותיו, ואז פרקה אותו דרך הנגד?



א. הזרם המרבי בתחילת תהליך טעינת הקבל נמדד ע"י A_1 :

$$I_{\max} = \frac{V}{R_1} = \frac{10}{1000} = 1 \cdot 10^{-2} A = 10mA$$

הזרם המרבי בתחילת תהליך פריקת הקבל ע"י A_2 :

$$I_{\max} = \frac{V}{R_2} = \frac{10}{2000} = 5 \cdot 10^{-3} A = 5mA$$

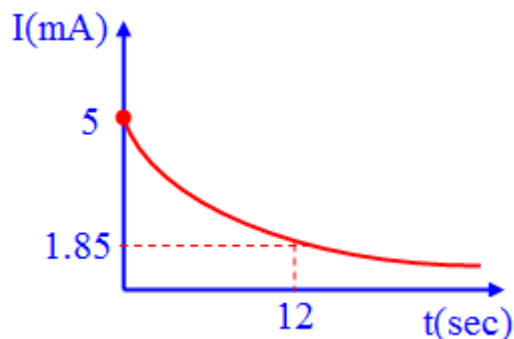
הגרף מתאים לזרם שנמדד ע"י A_1 .

ב. קבוע זמן הטעינה הוא הזמן שעבורו הזרם הוא 37% מערכו ההתחלתי $\left(I = \frac{I_0}{e} \right)$:

$$0.37I_0 = 0.37 \cdot 10 = 3.7mA$$

לפי הגרף הזמן המתאים ל- 3.7mA הוא $\tau = 6sec$.

$$\tau = R_1 \cdot C \Rightarrow C = \frac{\tau}{R_1} = \frac{6}{1000} = 0.006F = 6mF$$



ג.
$$I_{\max} = \frac{V}{R_2} = \frac{10}{2000} = 5 \cdot 10^{-3} A = 5mA$$

$$0.37I_0 = 0.37 \cdot 5 = 1.85mA$$

$$\tau = R_2 \cdot C = 2000 \cdot 0.006 = 12 \text{ sec}$$

ד. בתהליך הפריקה של הקבל האנרגיה שהייתה אגורה בקבל מומרת כולה לאנרגיית חום המשתחררת בנגד R_2 . כמות חום זו אינה תלויה בהתנגדותו של הנגד R_2 .

$$U_P = \frac{C \cdot V^2}{2} = \frac{6 \cdot 10^{-3} \cdot 10^2}{2} = 0.3J$$

ה. הקטנת המרחק בין לוחותיו פי שניים, מגדילה את הקיבול פי 2 מהקשר:

$$C = \frac{\epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot A}{d}$$

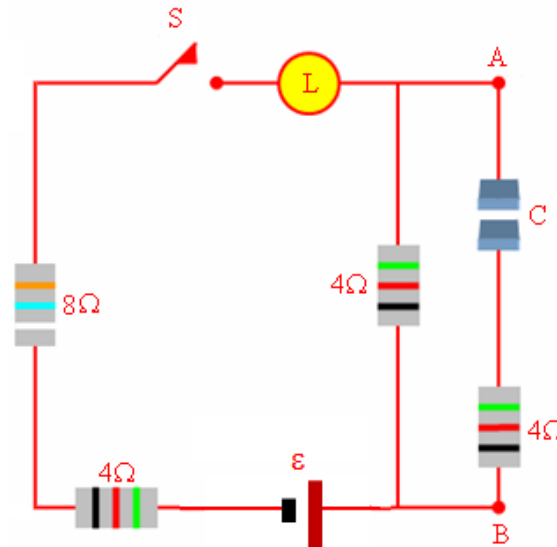
מאחר והפעולה בוצעה כאשר הקבל מנותק ממקור המתח, המטען הכולל אינו משתנה ולכן המתח

על פני הקבל קטן פי 2.
$$Q_0 = C_0 \cdot V_0 = 2C_0 \cdot \frac{V_0}{2}$$

$$U_P = \frac{C \cdot V^2}{2} = \frac{2C_0 \cdot \left(\frac{V_0}{2}\right)^2}{2} = \frac{C_0 \cdot V_0^2}{4} = \frac{U_P}{2} = 0.15J$$

במעגל החשמלי המופיע בתרשים ההתנגדות הפנימית של הסוללה זניחה.

נתונים: נורה עליה רשום: $0.125\text{W}/0.5\text{V}$, קבל שקיבולו: $C=4\mu\text{F}$.



א. כאשר המפסק S סגור זמן רב (המצב הסטציונרי), מהו הכא"מ המרבי של הסוללה ε עבורו הנורה לא תישרף?

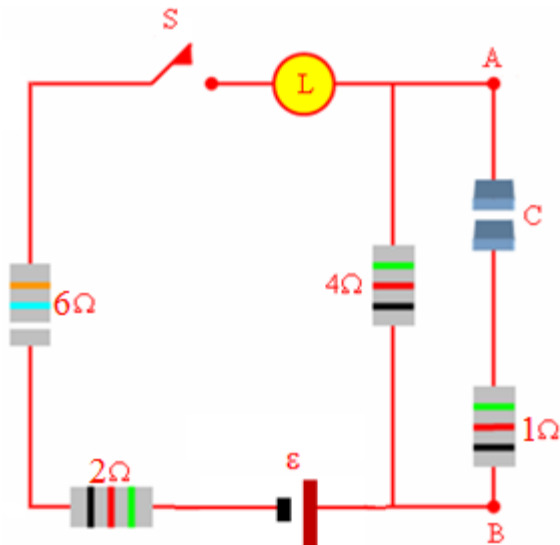
ב. מהו המתח V_{AB} וכמה אנרגיה אגורה בקבל, כאשר המפסק S סגור זמן רב?

ג. פותחים את המפסק S:

(1) כמה זמן יימשך תהליך הפריקה אם ידוע שזמן זה שווה בקירוב ל- 5τ ? ($\tau=R_T \cdot C$ קבוע זמן הפריקה)

(2) מהו מתח הקבל, מטען הקבל, והזרם ברגע פתיחת המפסק S?

ד. שרטטו גרפים איכותיים של: $I(t)$, $Q(t)$, $V(t)$ עבור תהליך הפריקה של הקבל.



נתונים: נורה עליה רשום: $0.125W/0.5V$, קבל שקיבולו: $C=4\mu F$.

מנתוני הנורה נמצא את הזרם במעגל:

$$P = V \cdot I \Rightarrow I_{\max} = \frac{P}{V} = \frac{0.125}{0.5} = 0.25A$$

הכא"מ שווה לסכום מפלי המתח על הנורה ועל הנגדים:

הנגד R_1 אינו משפיע על עוצמת הזרם העובר במעגל.

כאשר הקבל טעון בענף שבו נמצא הנגד R_1 לא זורם זרם,

כי הקבל מהווה נתק.

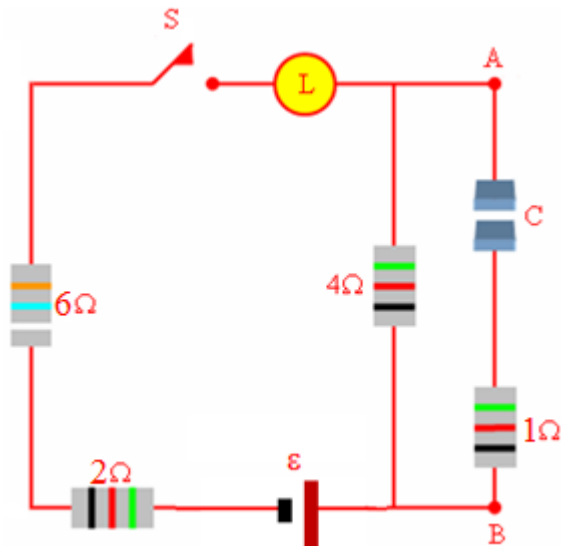
$$\varepsilon = V_L + V_2 + V_6 + V_4 = 0.5 + I \cdot R_2 + I \cdot R_6 + I \cdot R_4$$

$$\varepsilon = 0.5 + 0.25 \cdot 2 + 0.25 \cdot 6 + 0.25 \cdot 4 = 4.5V$$

ב. המתח V_{AB} כאשר המפסק S סגור שווה למתח על נגד 4Ω ושווה גם למתח על הקבל:

$$V_{AB} = V_4 = I \cdot R_4 = 0.25 \cdot 4 = 1V$$

$$U_P = \frac{C \cdot V_c^2}{2} = \frac{4 \cdot 10^{-6} \cdot 4.5^2}{2} = 40.5C$$



ג. כאשר פותחים את המפסק הפריקה מתבצעת דרך הנגדים R_1 ו- R_4

(1 זמן הפריקה שווה בקירוב ל- 5τ)

$$\tau = R_T \cdot C = (R_1 + R_4) \cdot C = (1 + 4) \cdot 4 \cdot 10^{-6} = 20 \cdot 10^{-6} \text{ sec}$$

$$5 \cdot \tau = 5 \cdot 20 \cdot 10^{-6} = 100 \cdot 10^{-6} \text{ sec}$$

(2 ברגע פתיחת המפסק S:

$$V_C = 4.5V$$

מתח הקבל:

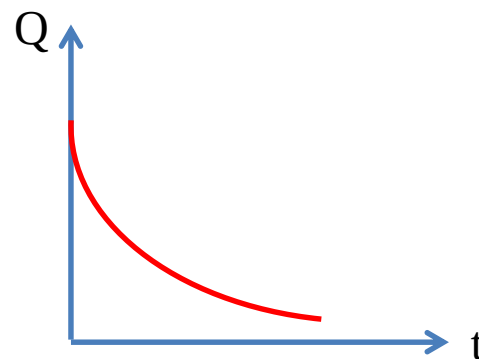
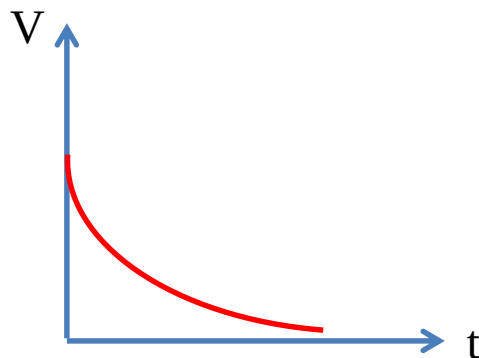
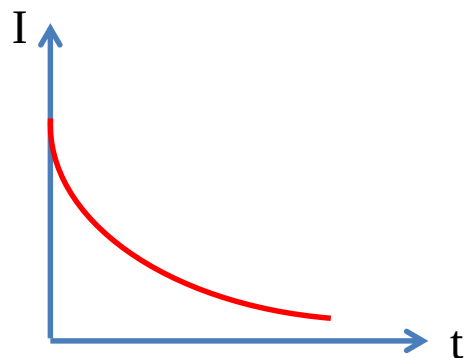
$$Q = V \cdot C = 4.5 \cdot 4 \cdot 10^{-6} = 18 \cdot 10^{-6} C$$

מטען הקבל:

$$I_0 = \frac{V_C}{R_1 + R_4} = \frac{4.5}{1 + 4} = 0.9A$$

הזרם:

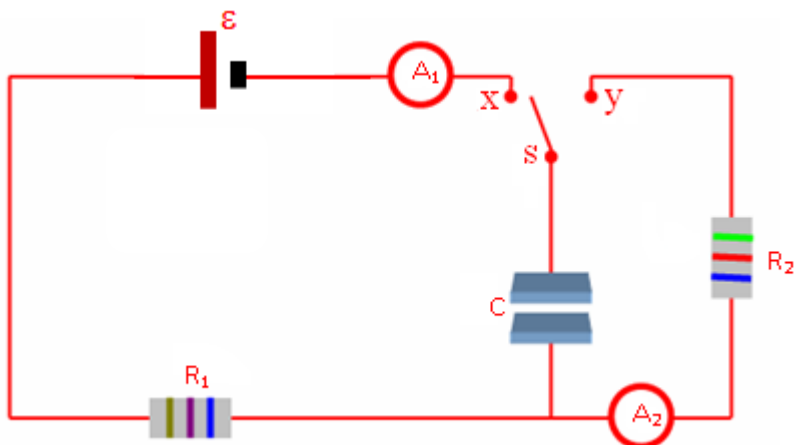
.ד



טעינה ופריקה של קבל

זהו מקרה פרטי של תהליך דעיכה.

מעגל חשמלי המכיל מקור מתח קבוע (סוללה) + קבל + נגד (מעגל R-C):

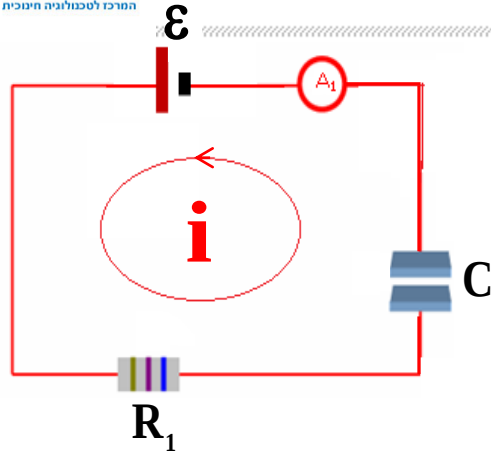


– כאשר המתג S מחובר ל x המעגל הינו מעגל טעינה של הקבל.

(נתייחס לנגד R_1 כמכיל גם את ההתנגדות הפנימית של הסוללה).

– כאשר המתג S מחובר ל y המעגל הינו מעגל פריקה של הקבל.

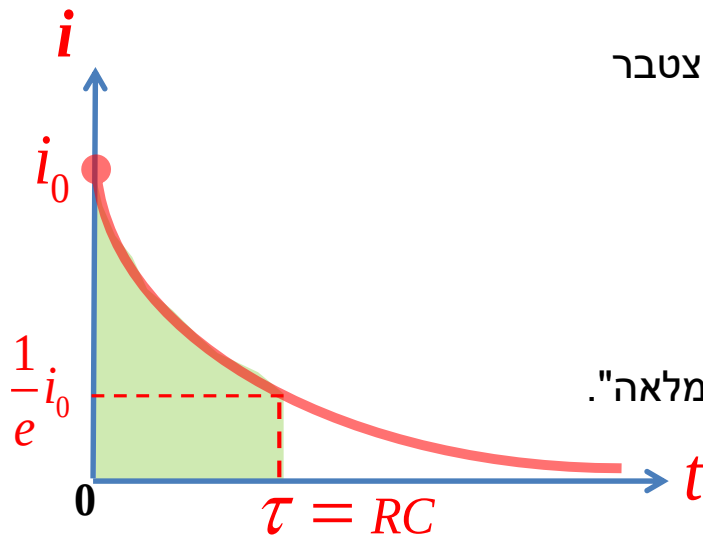
סיכום השעור (2)-מעגל טעינה



1. הזרם במעגל הטעינה : $i(t) = \frac{\varepsilon}{R} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$

א. קבוע הזמן : $\tau = RC$

א. זרם הפתיחה הוא $i_0 = \frac{\varepsilon}{R}$ הזרם דועך פי $\frac{1}{e}$ בכל מירווח זמן השווה ל : τ .



ב. ה "שטח" (הירוק) מתחת לגרף מייצג את המטען המצטבר

על הקבל עד אותו רגע. באיור-זהו המטען המצטבר עד חלוף קבוע זמן אחד.

ג. ה"שטח" הכולל מתחת לגרף, כלומר עד זמן אינסופי

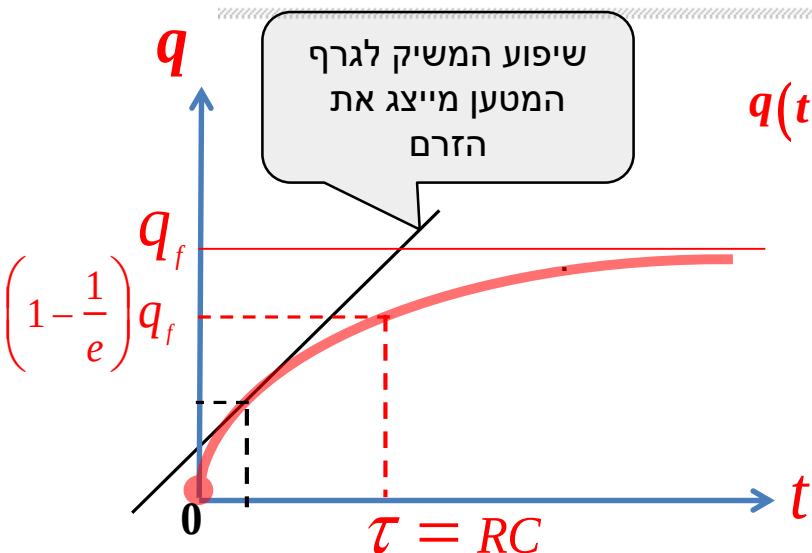
מייצג את המטען הכולל המצטבר על הקבל בטעינה "מלאה".

מטען זה שווה ל : $q_{final} = q_f = \varepsilon C$

ד. הטעינה נחשבת ל "מלאה מעשית" לאחר חמישה קבועי זמן.

בזמן זה הזרם דועך לכדי פחות מאחוז אחד מזרם הפתיחה ולכן נחשב כזניח.

סיכום השעור (3) מעגל טעינה



2. מטען הקבל במעגל טעינה: $q(t) = \mathcal{E}C \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$

א. גרף המטען מופיע מעל גרף הזרם לצורך השוואתי.

ב. המטען על הקבל מצטבר בהדרגה עד

הגיעו מעשית ל "ערך הסופי": $q_f = \mathcal{E}C$

ג. לאחר חמישה קבועי זמן 5τ צובר הקבל מטען העולה על 99% מ"המטען הסופי" (ונוכל על פי הסכמה לומר שהוא "טעון במלואו").

ד. לאחר קבוע זמן אחד צובר הקבל: $(1 - \frac{1}{e}) q_f$ שהם כ-63% ממטענו הסופי של

הקבל. (מיוצג ע"י ה"שטח" הירוק),

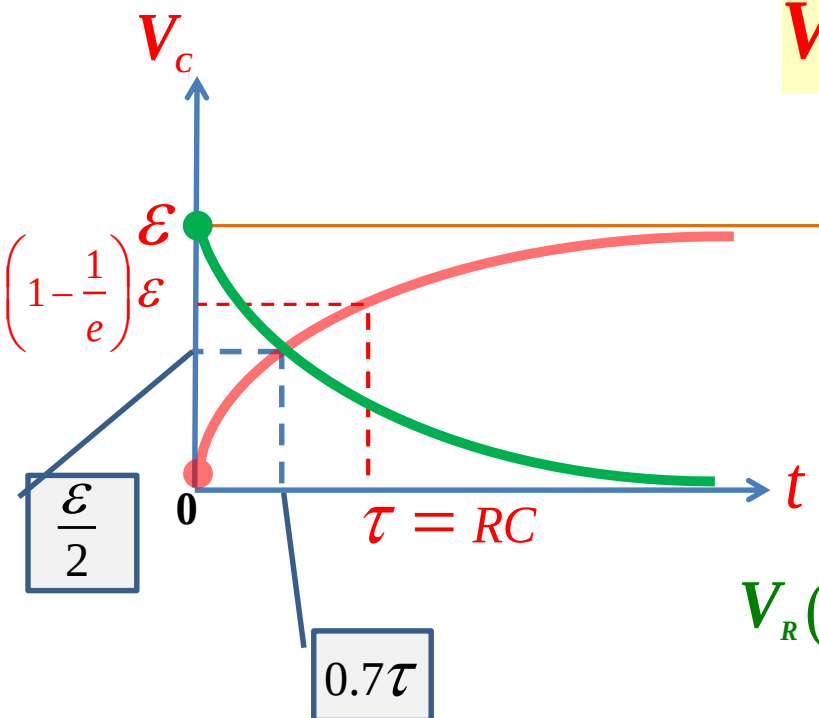
והזרם מהווה: $\frac{1}{e} i_0$ שהוא כ-34% מזרם הפתיחה.

3. מתחים :

המתח על הקבל (אדום) : $V_C(t) = \frac{q(t)}{C} = \mathcal{E} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$

המתח על הנגד (ירוק) : $V_R(t) = i(t) \cdot R = \mathcal{E} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$

ברור שמתקיים בכל זמן שהוא : $V_C(t) + V_R(t) = \mathcal{E}$

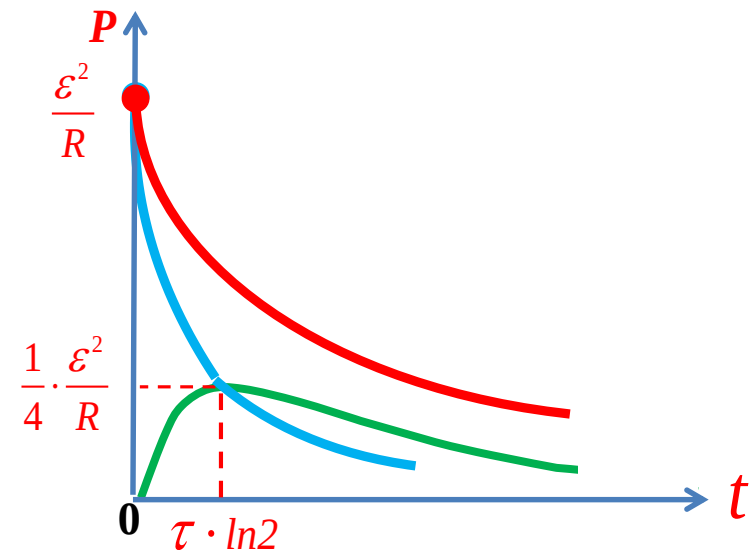


◀ הזמן בו המתח על הקבל שווה למתח על הקבל
הוא הזמן בו המתח על כל אחד מהם יהיה $\frac{\mathcal{E}}{2}$.

על פי פונקצית המתח על הנגד :

$$V_R(t) = \mathcal{E} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{\mathcal{E}}{2} \Rightarrow e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{1}{2} \Rightarrow t = \ln 2 \cdot \tau \approx 0.7\tau$$

4. הספקים



1. באדום: הספק המקור.

$$p_{\varepsilon}(t) = \frac{\varepsilon^2}{R} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

2. בכחול: ההספק על הנגד :

$$p_R(t) = \frac{\varepsilon^2}{R} \cdot e^{-\frac{2t}{\tau}}$$

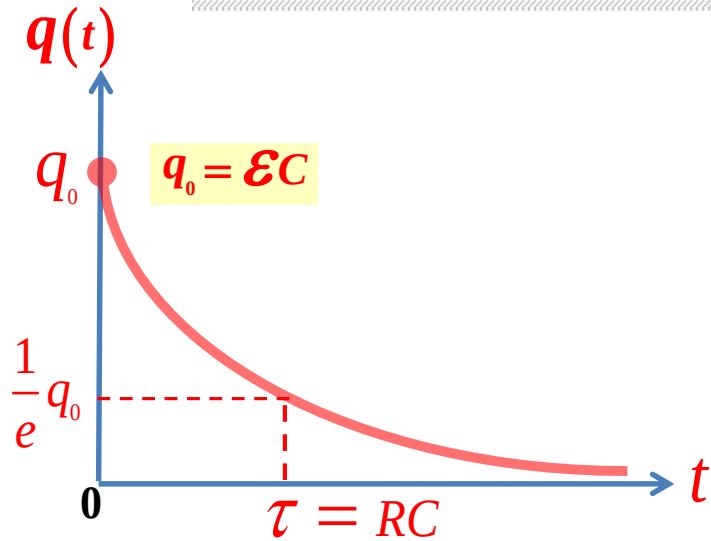
3. בירוק: קצב שינוי האנרגיה של הקבל :

$$p_C(t) = \frac{\varepsilon^2}{R} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

לכל t מתקיים :

$$P_{\varepsilon}(t) = P_C(t) + P_R(t)$$

סיכום השעור (6) מעגל פריקה



מטען הקבל במעגל פריקה : $q(t) = \underbrace{\varepsilon C}_{q_0} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$

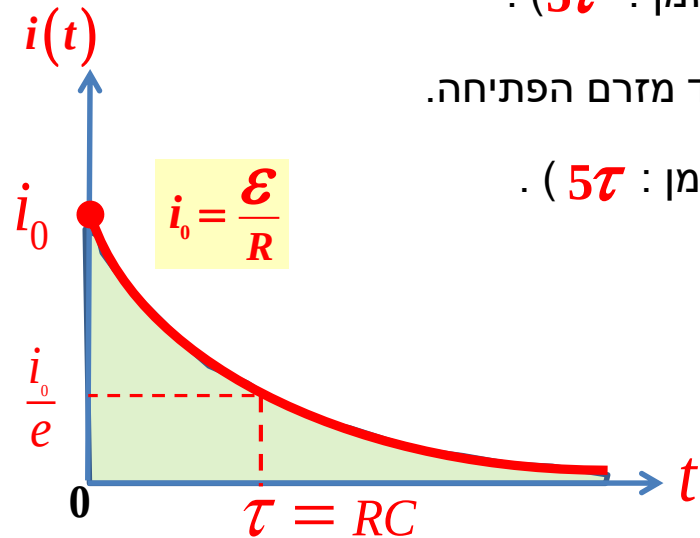
הזרם במעגל פריקה : $i(t) = \frac{\varepsilon}{\underbrace{R}_{i_0}} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$

א. המטען על הקבל מתרוקן בהדרגה עד הגיעו לפחות מאחוז אחד ממטען הפתיחה.

כאשר אז הוא נחשב לזניח. (וזאת לאחר חמישה קבועי זמן : 5τ).

ב. הזרם במעגל קטן בהדרגה עד הגיעו לפחות מאחוז אחד מזרם הפתיחה.

כאשר אז הוא נחשב לזניח. (וזאת לאחר חמישה קבועי זמן : 5τ).



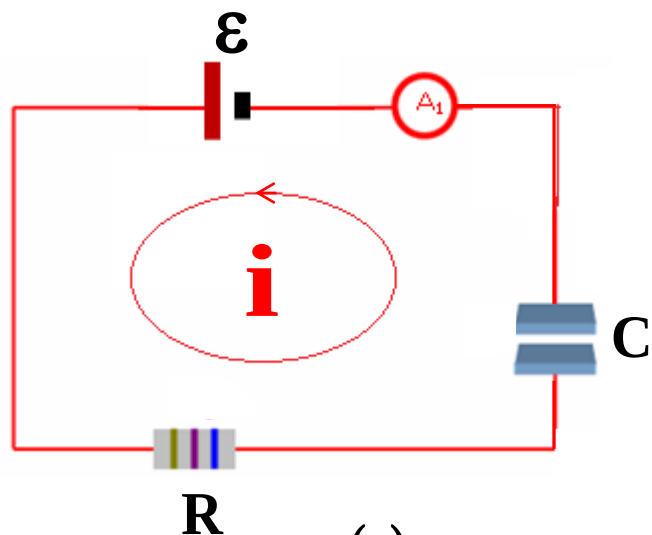
ג. ה"שטח" מתחת לגרף הזרם (ה"שטח" הירוק)

מייצג את מטען הקבל לפני פריקתו.

נספח - פיתוח מתימטי פורמלי של פונקציות הזרם והמטען במעגל טעינת קבל (1)

ב $t=0$ הקבל ריק והפרש הפוטנציאלים עליו הוא אפס. לפיכך הקבל מהווה קצר ברגע זה.

התנגדות האמפרמטר-זניחה.



מכאן נובע- זרם הפתיחה :

$$(1) \quad i(t=0) = i_o = \frac{\mathcal{E}}{R}$$

נרשום את משוואת המעגל החשמלי בזמן t כלשהו :

$$(2) \quad \mathcal{E} = i(t) \cdot R + \frac{q(t)}{C}$$

משוואה זו נקראת-משוואה דיפרנציאלית (נמצאים בה, בכפיפה אחת גם מטען הקבל $q(t)$

וגם הזרם הטוען אותו המוגדר כנגזרת, לפי הזמן, של המטען. כלומר : $i \equiv \frac{dq}{dt}$).

נרשום את משוואה (2) כך :

$$(3) \quad \mathcal{E} = \frac{dq}{dt} \cdot R + \frac{q(t)}{C}$$

או :

$$(4) \quad \frac{\mathcal{E}}{R} - \frac{q(t)}{RC} = \frac{dq}{dt}$$

המשך בשקופית הבאה...

נספח-פיתוח מתימטי פורמלי של פונקציות הזרם והמטען במעגל טעינת קבל (2)

◀ לשם נוחות נעתיק לכאן את משוואה (4) :

$$(4) \quad \frac{\mathcal{E}}{R} - \frac{q(t)}{RC} = \frac{dq}{dt}$$

◀ משוואה זו ניתנת להפרדת משתנים :

$$(5) \quad \frac{dq}{\frac{\mathcal{E}}{R} - \frac{q(t)}{RC}} = dt$$

◀ מאינטגרציה על שני האגפים, נקבל : k_1 constant

$$(6) \quad \ln\left(\frac{\mathcal{E}}{R} - \frac{q(t)}{RC}\right) = -\frac{1}{RC}t + k_1$$

◀ ומכאן :

$$(7) \quad \frac{\mathcal{E}}{R} - \frac{q(t)}{RC} = k_2 e^{-\frac{t}{RC}} \quad k_2 \text{ constant}$$

◀ כעת נציב תנאי התחלה : $q_{\text{capacitor}}(t=0) = 0$ → $\frac{\mathcal{E}}{R} - \frac{0}{RC} = k_2 e^{-\frac{0}{RC}}$ → $k_2 = \frac{\mathcal{E}}{R}$

◀ נציב : $k_2 = \frac{\mathcal{E}}{R}$ במשוואה (7) ונקבל לבסוף :

$$(8) \quad q(t) = C\mathcal{E}\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

המשך

$$(8) \quad q(t) = \underbrace{C}_{q_{final}} \mathcal{E} \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right)$$

◀ לשם נוחות נעתיק לכאן את משוואה (8) :

$$(9) \quad i(t) = \frac{dq}{dt} = \left[\underbrace{\frac{\mathcal{E}}{R}}_{i_0} \right] e^{-\frac{t}{RC}}$$

◀ את הזרם נקבל על פי נגזרת, לפי הזמן של המטען :

חישוב קבוע הזמן

◀ הדרישה : $i(t = \tau) = \frac{i_0}{e}$

נקבל : $\tau = RC$

◀ נציב בנוסחא (9) : $\frac{i_0}{e} = i_0 e^{-\frac{\tau}{RC}}$

נספח ב' - הוכחת תאימות בין ההגדרה המתימטית להגדרה הפיסיקלית של קבוע הזמן

◀ הוכחה זו היא **כללית עבור כל פונקציות הדעיכה**, למרות שכאן מובאת ההוכחה במקרה פרטי של דעיכת הזרם בעת טעינת קבל.

נניח כאן שתי הנחות:

הנחה א': הזמן שהיה נדרש לצורך טעינה מלאה של הקבל בתנאי הנחה א' הוא t^* .

הנחה ב': זרם הטעינה היה קבוע ושווה לזרם הפתיחה i_0 .

תחת הנחות אלו נוכיח ש: $t^* = \tau$.

◀ הוכחה:

1. כשהקבל מתמלא עד תום, מטענו: q_{final} .

2. בתנאי זרם קבוע (כלומר קצב טעינה קבוע) עד לטעינה מלאה מטענו הסופי: $q_{final} = i_0 \cdot t^*$ (1)

3. הפונקציה המתארת את מטען הקבל כתלות בזמן: $q(t) = q_{final} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$.

4. זרם הפתיחה הוא: $i_0 = i(t=0) = \frac{dq(t)}{dt}(t=0) = \frac{q_{final}}{\tau}$ (2)

5. נציב את i_0 ממשוואה (2) אל משוואה (1) ונקבל: $q_{final} = \frac{q_{final}}{\tau} \cdot t^*$ (3) ולכן: $t^* = \tau$