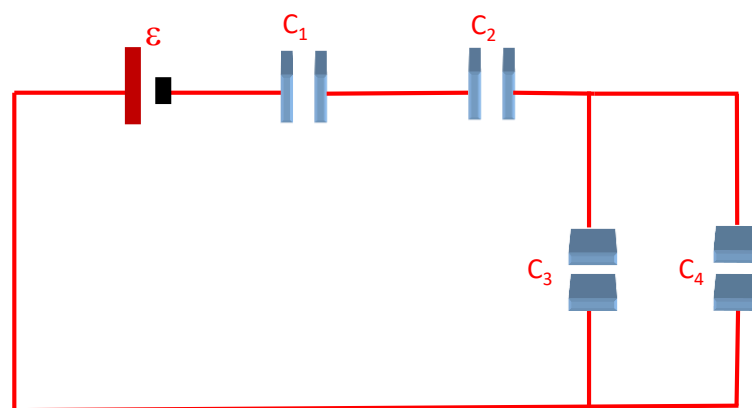


חשמל

קיבול חשמלי

חלק ג'



◀ מערכי קבלים:

◀ מערך קבלים כללי.

◀ פתרון מערך קבלים כללי.

◀ מקרים פרטיים:

◀ קבלים מקביליים.

◀ קבלים טוריים.

◀ גשר ויטסטון מאזן (בנספח).

◀ ניתן לחבר מספר קבלים זה לזה בצורות חיבור שונות. לקונפיגורציה (תצורה, מבנה) כזו אנו קוראים: **מערך קבלים**.

◀ הנחת העבודה שלנו היא שמערך הקבלים מחובר לסוללה אחת בלבד או מצבר (צבר סוללות) יחיד.

◀ ניתן לעבור בכל מקרה למערכת שקולה, פשוטה יותר, המורכבת מקבל בודד (הנקרא **קבל שקול** ויסומן C_e). האות e מייצגת את המונח: *equivalent*, כלומר שקול ל...

◀ השקילות מתבטאת בכך שהקבל השקול יגרום לסוללה להעביר דרכה בדיוק את אותה כמות מטען שעברה דרכה כאשר היא היתה מחוברת למערך הקבלים המקורי.

◀ כלומר: הסוללה לא תרגיש בשינוי אם נחליף את מערך הקבלים המחובר אליה בקבל שקול יחיד.

◀ נדגיש שוב: קבל שקול קיים רק אם מערך הקבלים מחובר לסוללה אחת בלבד.

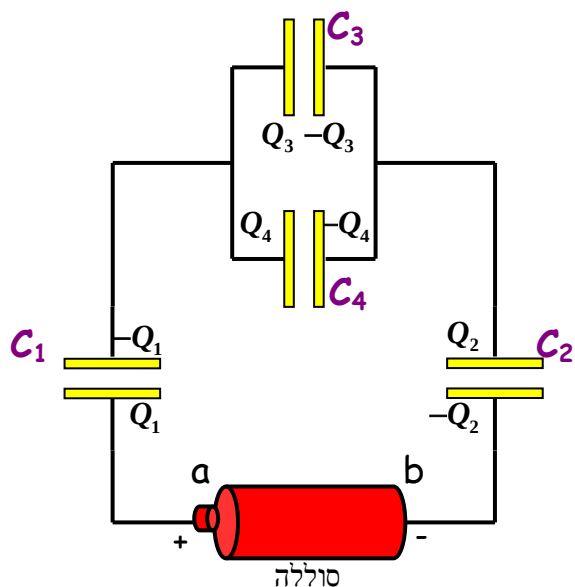
◀ אנחנו נדון ב: **א**. מערך קבלים כללי. **ב**. מקרים פרטיים: **1**. מערך קבלים מקבילי.

2. מערך קבלים טורי.

3. גשר ויטסטון מאזן של קבלים.

(הדיון בגשר ויטסטון - בנספח).

◀ מערך קבלים כללי יכול להיראות למשל כך :



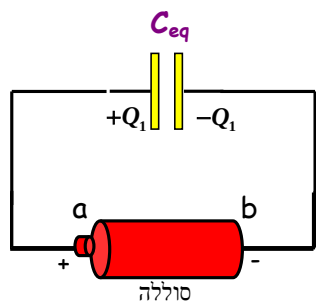
◀ הערה

כל עוד לא הגדרנו מקרים פרטיים-יכול מערך קבלים זה (או כל מערך קבלים אחר) להיחשב כמעריך קבלים כללי.

◀ **הקבל השקול** למערך קבלים זה הוא **קבל יחיד** אשר יגרום לסוללה

להעביר דרכה, ממוליך A למוליך B, את אותה כמות מטען

שעברה דרכה כאשר היא היתה מחוברת למערך הקבלים המקורי.

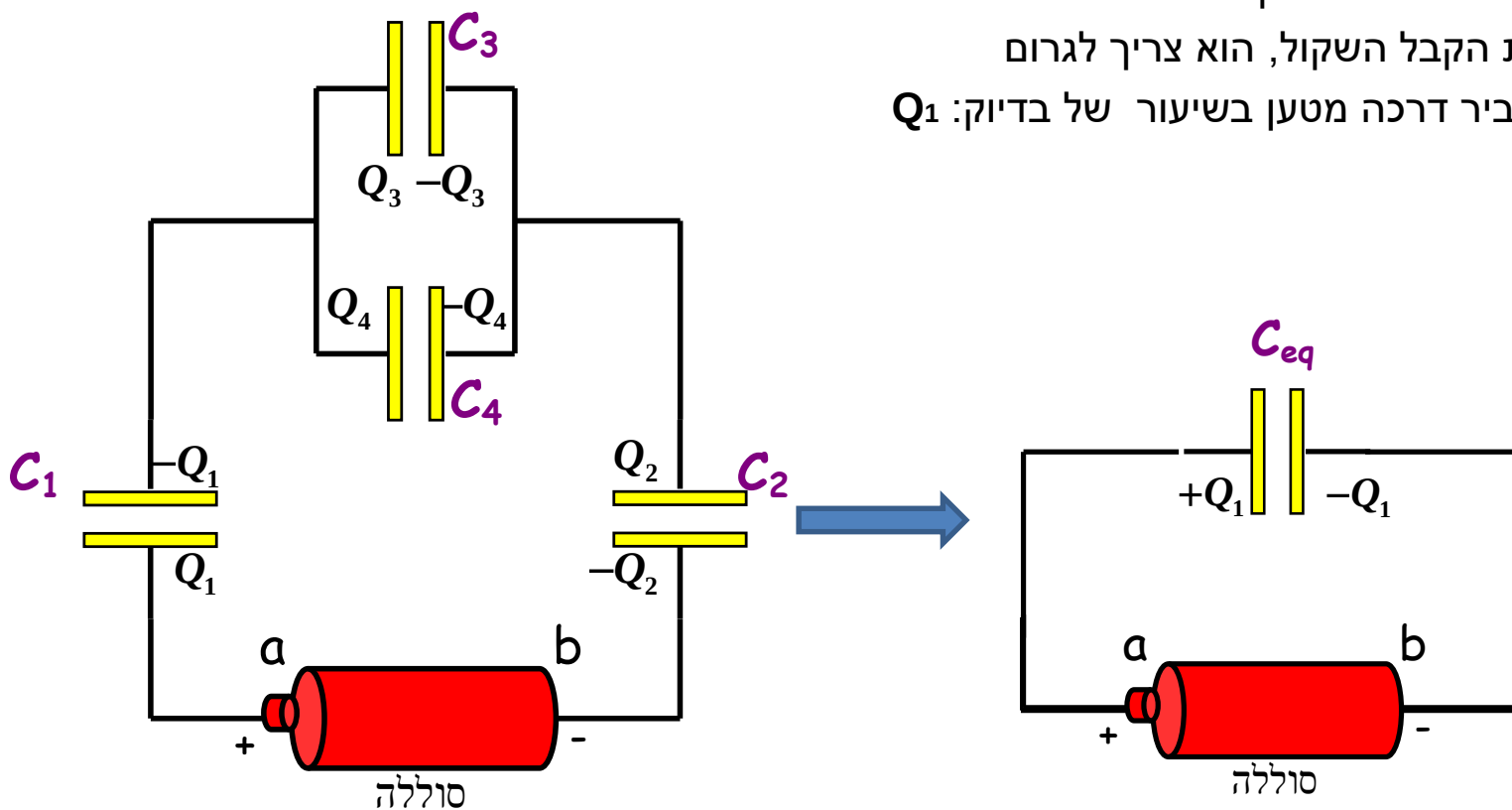


כלומר- הסוללה לא תרגיש בהבדל שבין שתי התצורות (קונפיגורציות).

פתרון מערך קבלים כללי-חישוב הקיבול השקול (1)

- שימו לב לכך שהסוללה מחוברת רק אל הלוחות התחתונים של הקבלים C_1 ו C_2 .
- כלומר, במונחי זרם מוסכם, היא מעבירה מטען חיובי, דרכה, מהלוח התחתון של קבל 2 אל הלוח התחתון של קבל 1.
- לפני תהליך הטעינה, הקבלים היו נייטרליים.
- לכן חייב להתקיים: $Q_1 - Q_2 = 0$. כלומר: $Q_1 = Q_2$.

- לפיכך, אם נחבר לסוללה זו קבל אחד בלבד האמור להיות הקבל השקול, הוא צריך לגרום לסוללה להעביר דרכה מטען בשיעור של בדיוק: Q_1



פתרון מערך קבלים כללי-חישוב הקיבול השקול (2)

◀ נוכל להתיר מערך זה (או כל מערך קבלים אחר) באמצעות חוקי קירכהוף המתבססים על שני עקרונות בסיסיים – שימור מטען והעובדה ששדה אלקטרוסטטי הוא שדה משמר.
(כלומר : עבודת השדה על פני כל מסלול סגור היא תמיד אפס).

חוקי קירכהוף עבור עניבות קבלים

◀ נגדיר תחילה מונחי יסוד עבור חוקים אלו:

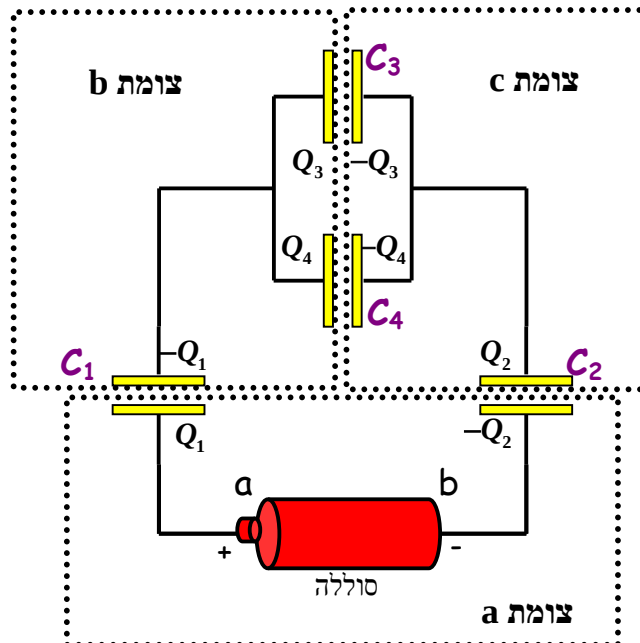
1. עניבה

תייל סגור על עצמו המכיל אלמנטים חשמליים שונים כגון : סוללות, נגדים, קבלים וכו'. בשלב זה נעסוק בעניבות המכילות סוללה אחת אליה מחוברים קבלים בצורות חיבור שונות.

2. צומת

"אי מבודד" שאינו מחובר ל"עולם החיצוני".

(למשל באיור המוצג כאן ישנם 3 צמתים (ראו איור)).



פתרון מערך קבלים כללי-חישוב הקיבול השקול (3)

חוק הצומת

◀ סך המטען נטו בכל צומת הוא אפס (חוק זה נובע משימור מטען).

◀ בדוגמא שלנו נוכל לרשום 3 משוואות צומת:

צומת a

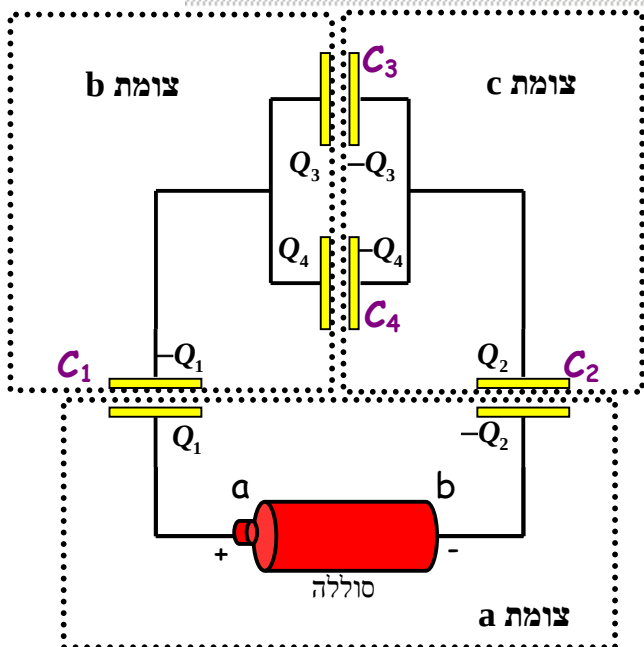
$$1) Q_1 - Q_2 = 0$$

צומת b

$$2) -Q_1 + Q_3 + Q_4 = 0$$

צומת c

$$3) -Q_3 - Q_4 + Q_2 = 0$$



◀ שימו לב כי אחת המשוואות מתקבלת משתי המשוואות האחרות { משוואה (1) מתקבלת מחיבורן של משוואות (2) ו (3) }.

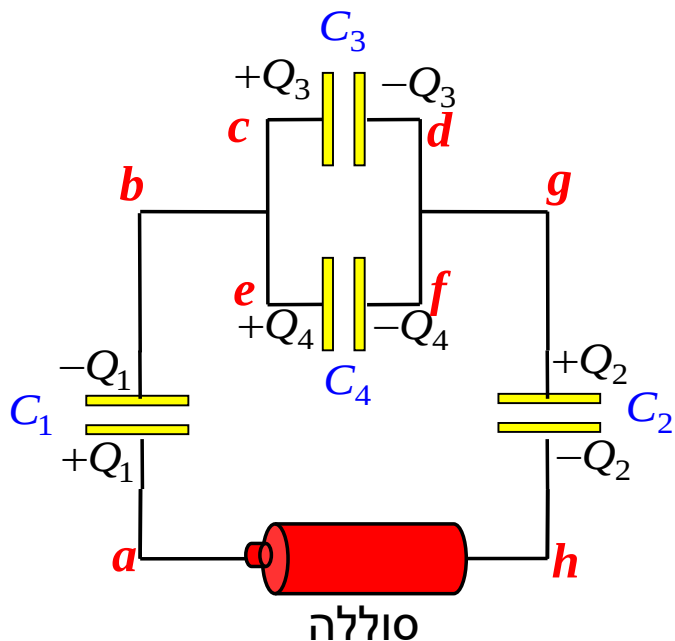
כך שאפקטיבית ישנן כאן רק שתי משוואות בלתי תלויות { למשל משוואות (1) ו: (2) המסומנות באדום }.

פתרון מערך קבלים כללי-חישוב הקיבול השקול (4)

◀ חוק העניבה (מתח סוללה הוא V)

סך מפלי הפוטנציאלים בכל עניבה סגורה הוא אפס (חוק זה נובע מכך שהשדה האלקטרוסטטי הוא שדה משמר, כך שלאורך כל מסלול סגור הפרש הפוטנציאלים חייב להיות אפס).

◀ בדוגמא שלנו נוכל לרשום 3 משוואות עניבה:



$$4) \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_3}{C_3} + \frac{Q_2}{C_2} - V = 0$$

עניבת המסלול : a-b-c-d-g-h-a

$$5) \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_4}{C_4} + \frac{Q_2}{C_2} - V = 0$$

עניבת המסלול : a-b-e-f-g-h-a

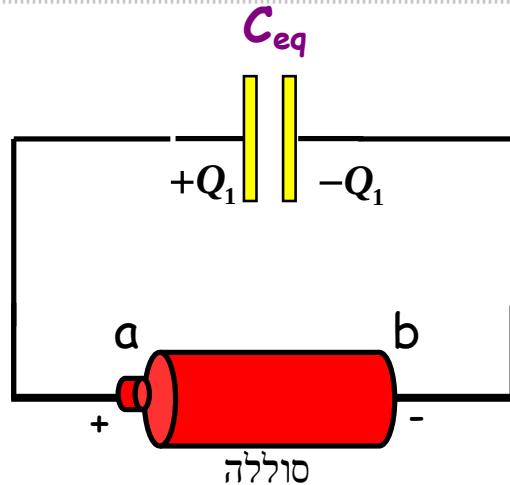
$$6) \frac{Q_3}{C_3} - \frac{Q_4}{C_4} = 0$$

עניבת המסלול : c-d-f-e-c

◀ שימו לב כי גם כאן אחת המשוואות מתקבלת משתי המשוואות האחרות כך שאפקטיבית ישנן כאן רק שתי משוואות בלתי תלויות- (למשל משוואות (4) ו: (6) המסומנות באדום).

פתרון מערך קבלים כללי-חישוב הקיבול השקול (5)

כמו כן נוכל לרשום משוואת עבור הקבל השקול :



$$(7) \frac{Q_1}{C_{eq}} - V = 0$$

נקבל כאן 5 משוואות אפקטיביות (המשוואות "האדומות" בשתי השקופיות הקודמות), המכילות 5 נעלמים : $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, C_{eq}$ אשר באמצעותן נוכל לחשב את קיבולו של הקבל השקול C_e :

משוואות צומת

$$(1) \quad Q_1 - Q_2 = 0$$

$$(2) \quad -Q_1 + Q_3 + Q_4 = 0$$

משוואות עניבה

$$(4) \quad \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_3}{C_3} + \frac{Q_2}{C_2} - V = 0$$

$$(6) \quad \frac{Q_3}{C_3} - \frac{Q_4}{C_4} = 0$$

מעגל שקול

$$(7) \quad \frac{Q_1}{C_{eq}} - V = 0$$

כמובן שפתרון זה מסורבל מאוד. ואנחנו לא נפתור כאן את המשוואות, אבל יתרונו בכך שניתן לפתור כל מערך קבלים שהוא ולקבל את ערכו של הקבל השקול.

במקרים פרטיים מסוימים ניתן לקצר בהרבה את מהלך הפתרון. נציג זאת בשקופיות הבאות.

◀ ישנם שלושה מקרים פרטיים שכיחים של מערכי קבלים:

1. מערך קבלים מקבילי.

2. מערך קבלים טורי.

3. גשר ויטסטון מֵאָזֶן של קבלים.

(גשר ויטסטון הינו מחוץ לחומר הלימוד ולכן יופיע בנספח)

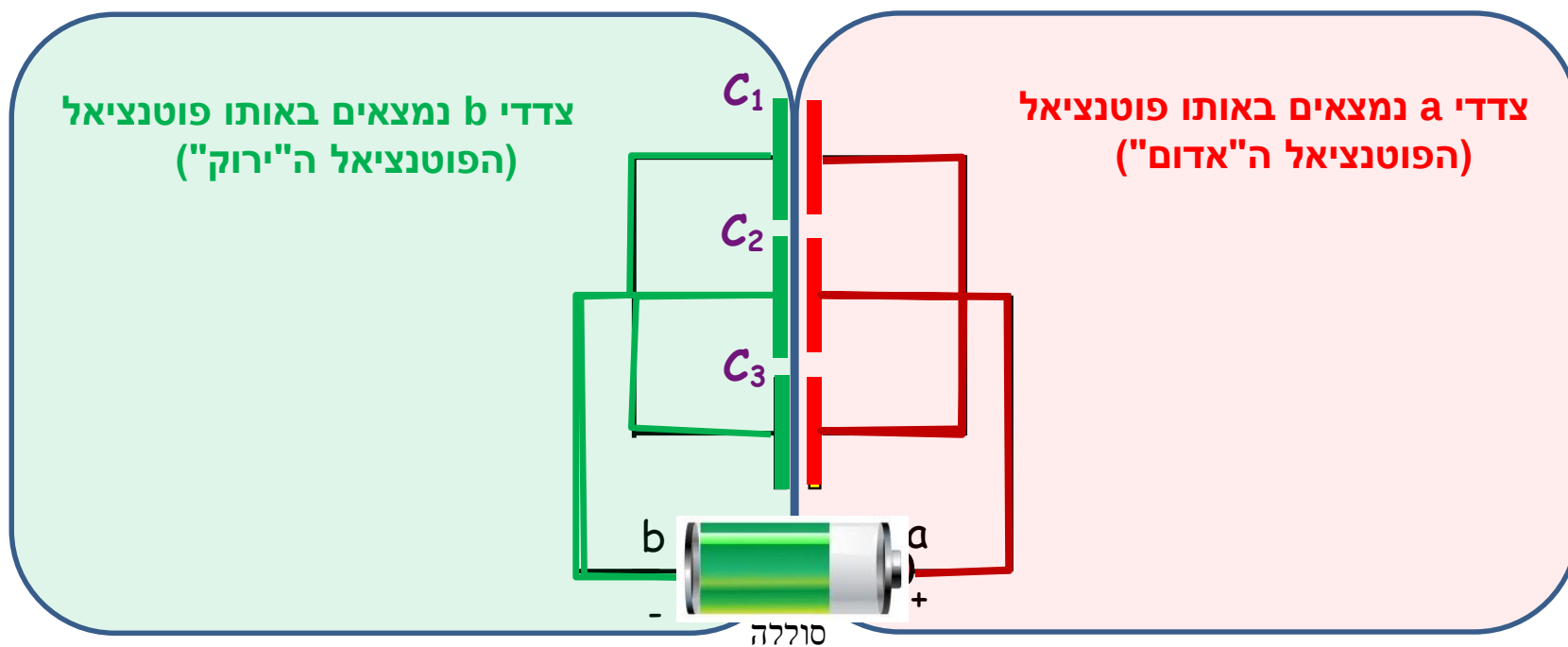
אפיון :

מספר קבלים יקראו "מחוברים במקביל" אם מתקיים חיתוך שני התנאים הבאים:

א. צדדי a של כל הקבלים הם שווי פוטנציאל.

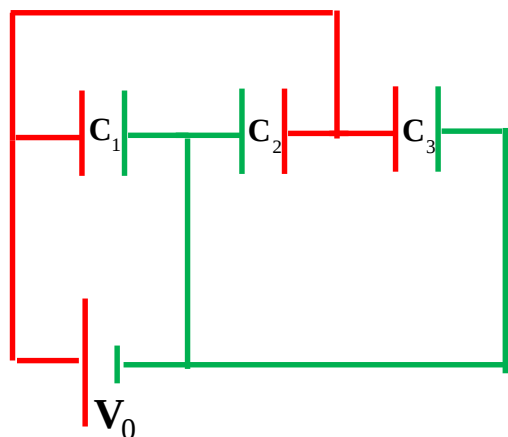
I

ב. צדדי b של כל הקבלים הם שווי פוטנציאל.

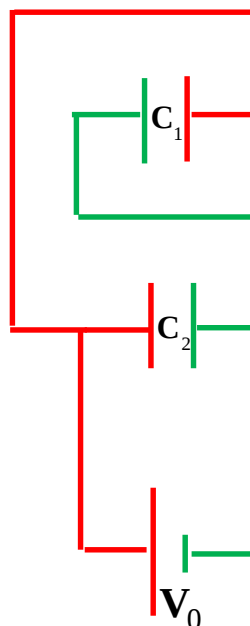


◀ דרך נוחה לאיתור קבלים מקביליים מבוססת על התאמת צבע לכל פוטנציאל.

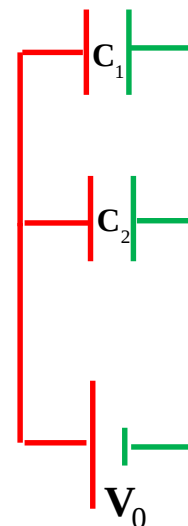
◀ **דוגמאות** (הצבע **האדום** מייצג את הפוטנציאל הגבוה הצבע **הירוק** מייצג את הפוטנציאל הנמוך) :



שלושה קבלים מקביליים



שני קבלים מקביליים

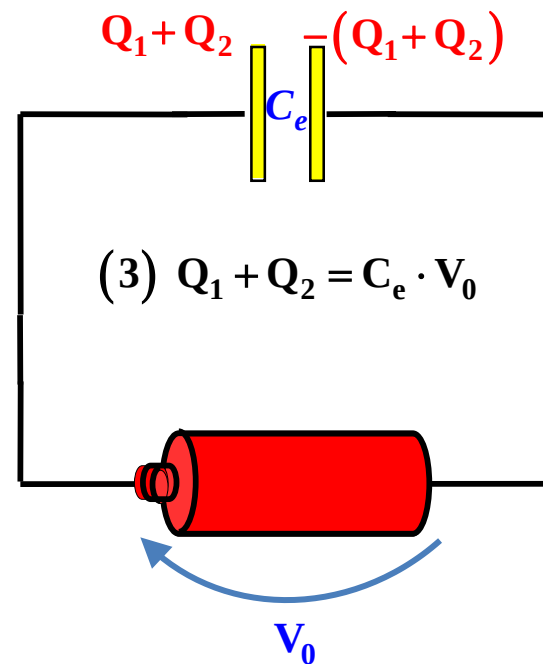
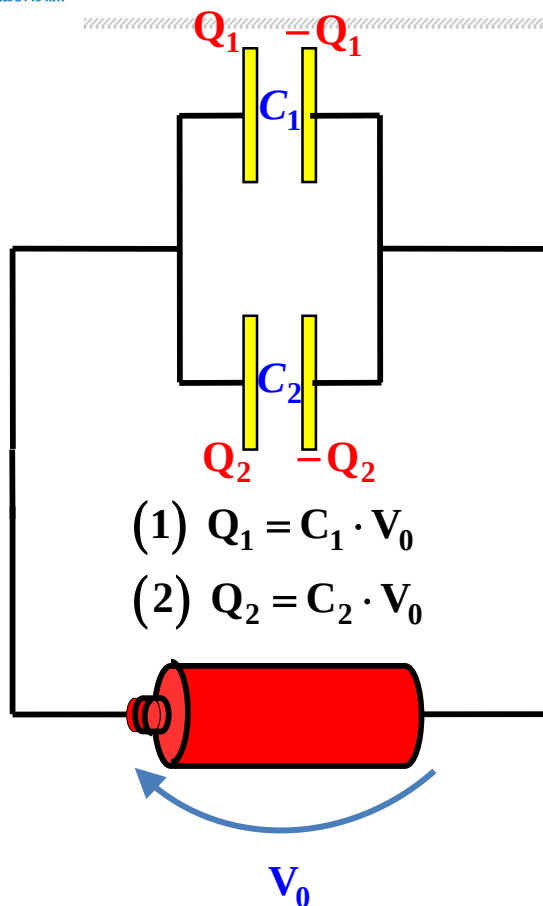


שני קבלים מקביליים

◀ נבחין כי במקרה זה המטען העובר דרך הסוללה בתהליך הטעינה שווה **לסכום** מטעני הקבלים.

1. מערך קבלים מקבילי (3)

חישוב השקול המקבילי:



$$C_1 V_0 + C_2 V_0 = C_e V_0$$

נציב את Q_1 ואת Q_2 במשוואה (3) ונקבל:

$$C_e = C_1 + C_2 + \dots$$

מכאן:

$$C_e = \sum_{i=1}^n C_i$$

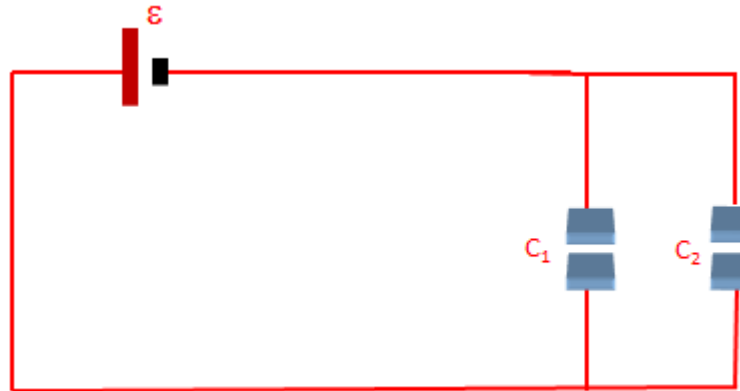
או בהכללה:

מאחר ומתחי הקבלים שווים זה לזה-יחס מטעני הקבלים שווה ליחס קיבוליהם. כלומר:

$$q_1 : q_2 : q_3 \dots = C_1 : C_2 : C_3 \dots$$

(אתם מוזמנים להוכיח טענה זו).

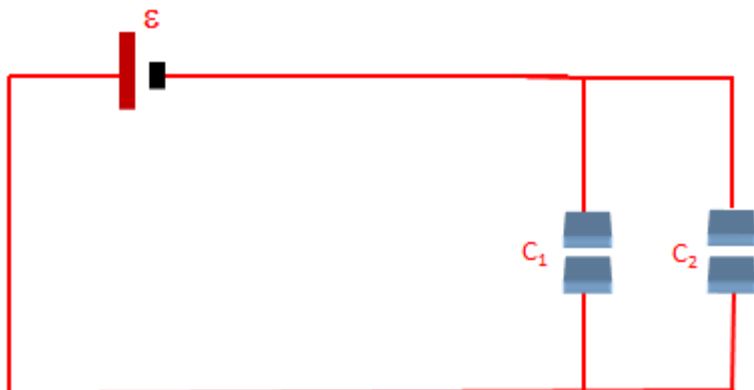
במעגל המתואר בתרשים נתון ש: $C_1 = 8\mu F$, $C_2 = 6\mu F$. הכא"מ של מקור המתח $\varepsilon = 40V$.



א. חשבו את:

1. המטען על כל קבל.
 2. המתח על כל אחד מהקבלים.
 3. האנרגיה החשמלית האגורה בכל אחד מהקבלים.
- ב. מנתקים את מקור המתח מהמעגל החשמלי. מה יהיה עתה:

1. המתח על כל אחד מהקבלים.
2. המטען על כל קבל.



א. 1. המתח על כל אחד מהקבלים: $V_1 = V_2 = \varepsilon = 40V$

2. המטען על כל קבל:

$$Q_1 = C_1 \cdot V_1 = 8 \cdot 10^{-6} \cdot 40 = 320 \cdot 10^{-6} C$$

$$Q_2 = C_2 \cdot V_2 = 6 \cdot 10^{-6} \cdot 40 = 240 \cdot 10^{-6} C$$

3. האנרגיה החשמלית האגורה בכל אחד מהקבלים:

$$U_{P1} = \frac{C_1 \cdot V_1^2}{2} = \frac{8 \cdot 10^{-6} \cdot 40^2}{2} = 6400 \cdot 10^{-6} J$$

$$U_{P2} = \frac{C_2 \cdot V_2^2}{2} = \frac{6 \cdot 10^{-6} \cdot 40^2}{2} = 4800 \cdot 10^{-6} J$$

ב. כאשר מנתקים את מקור המתח מהמעגל החשמלי, המטען הכולל אינו משתנה, והקיבול השקול

אינו משתנה לכן המתח על כל קבל והמטען על כל קבל לא ישתנה.

◀ גוף **a** מוליך בעל צורה כלשהי טעון במטען q_1 והפוטנציאל שלו הוא V_1 .

א- מהו קיבולו ?

ב- מחברים אליו בעזרת תייל מוליך גוף מוליך **לא טעון** נוסף **b** ומסתבר שפוטנציאל גוף **a** קטן ב- V .

מהו קיבולו של גוף **b** ?

חיבור שני קבלים במקביל מוגדר כך:

– צדדי א' של שני הקבלים הם שווי פוטנציאל.

– צדדי ב' של שני הקבלים הם שווי פוטנציאל.

ג- הסבירו בעזרת הגדרה זו מדוע ניתן להתייחס אל שני המוליכים כאילו הם מחוברים במקביל?

ד- הראו כי קיבול המערכת כולה הוא סכום קיבולי הקבלים הבודדים כפי שמתבקש מנוסחת החיבור של קבלים במקביל.

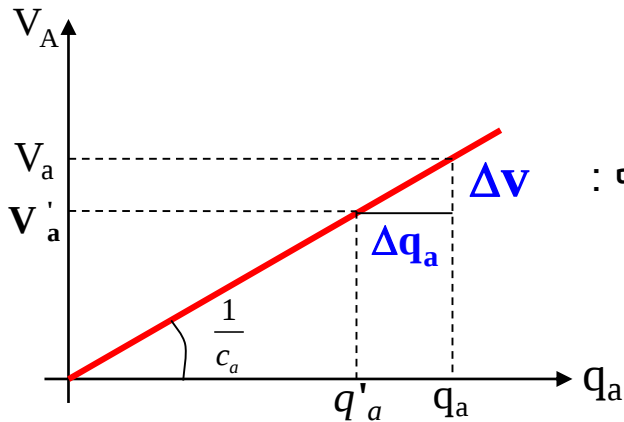
ה- הראו כי אנרגיית המערכת קטנה לאחר חיבור מוליך **b** . מדוע ניתן "לנחש" זאת ללא חישוב?

פתרון דוגמא (2) דף 1-

א- קיבולו של גוף a הוא : $C_a = \frac{q_1}{V_1}$ (1)

ב- נגדיר את קיבולו של גוף b כ : $C_b = \frac{q_b}{V_b}$ (2)

◀ q_b הוא המטען $|\Delta q_a|$ שנגרע מגוף a.



◀ גריעת המטען מגוף a ניתנת לחישוב על פי : $\frac{1}{C_a} = \frac{V}{|\Delta q_a|}$ (3). ראו גרף :

◀ מ (1) ו (3) נקבל : $q_b = \Delta q_a = C_a V = \frac{q_1}{V_1} \cdot V$ (4)

◀ הפוטנציאל האחד של שני הגופים לאחר חיבורם הוא : $V_b = V' = V_1 - V$ (5)

◀ מ (2) ו (4) נקבל : $C_b = \frac{q_b}{V_b} = \frac{q_1 \cdot V}{V_1 (V_1 - V)}$ (6)

$$(7) \quad C_b = \frac{q_1 \cdot V}{V_1 (V_1 - V)}$$

ג- שני המוליכים הם צדדי א' של שני קבלים אשר כל אחד מהם הוא מוליך בודד. הפוטנציאל של המוליכים (צדדי א') שווה לשניהם והוא מיוחס לאינסוף כנקודת יחוס. צד ב' של כל מוליך הוא האינסוף, כך שלכל מוליך יש כביכול "בן זוג" במרחק אינסופי ממנו. וכך יוצא ששני צדדי ב' של הקבלים הוא אפס (פוטנציאל האינסוף). כלומר- שני צדדי א' של שני הקבלים הם שווי פוטנציאל וגם שני צדדי ב' של הקבלים הם שווי פוטנציאל. לפיכך מתקיימת הגדרת המקבילות של שני הקבלים.

ד- הקיבול השקול של שני קבלים מקביליים הוא: $C_e = C_a + C_b$. על פי נוסחא זו נחשב את הקיבול השקול של שני הקבלים:

$$(1) \quad C_a = \frac{q_1}{V_1} \quad (7) \quad C_b = \frac{q_1 \cdot V}{V_1(V_1 - V)} \quad \text{על סמך השקופית הקודמת:}$$

מכאן:

$$C_e = C_a + C_b = \frac{q_1}{V_1} + \frac{q_1 \cdot V}{V_1(V_1 - V)} = \frac{q_1}{V_1} \left[1 + \frac{V}{(V_1 - V)} \right] = \frac{q_1}{(V_1 - V)}$$

◀ כעת נחשב את הקיבול השקול של מוליך יחיד (המורכב משני המוליכים המחוברים ביניהם ומטענם המשותף הוא כמובן מטענו q_1 של מוליך a לפני חיבורו ל b. והפוטנציאל שלו ביחס לאינסוף הוא: $(V_1 - V)$):

נקבל מייד: $C_e = \frac{q_1}{(V_1 - V)}$, ובזאת הוכחנו ששני מוליכים המחוברים ביניהם הריהם כשני קבלים מקביליים.

כל כך יפה. הלא כן?

ה- 1. הסבר פיסיקלי :

אנרגיית המערכת קטנה עקב חיבור המוליך הנוסף. אפשר "לנחש" זאת ללא חישוב משום שמדובר בתהליך ספונטאני בו מטען עובר ממוליך למוליך ללא התערבות חיצונית. כל תהליך ספונטאני כרוך בירידה באנרגיה הפוטנציאלית של המערכת.

מטען חשמלי סטטי מתחיל לזרום ופולט קרינה (שחלקה הארי היא קרינת אינפרא אדום- כלומר נפלט חום). כשנבלמת הזרימה-לאחר פיזור המטען על פני שטח הפנים החיצוני של המוליך השני-שוב נפלטת קרינה בגין תאווה.

זיכרו- כל אימת שחלקיק טעון מואץ-נפלטת אנרגיה המתבטאת בגל אלקטרו-מגנטי הנפלט לסביבה. תוצאה הנובעת ישירות ממשוואות מקסוול.

2. חישוב מתימטי :

המטען הכולל של המערכת היה ונשאר q_1 :

$$\Delta U = U_{FINAL} - U_{INITIAL} = \frac{q_1^2}{2C_{final}} - \frac{q_1^2}{2C_{initial}} = \frac{q_1^2}{2} \left[\frac{1}{C_{final}} - \frac{1}{C_{initial}} \right]$$

$$C_{final} = \frac{q_1}{(V_1 - V)} \quad C_{initial} = \frac{q_1}{V_1}$$

$$\Delta U = \frac{q_1^2}{2} \left[\frac{V_1 - V}{q_1} - \frac{V_1}{q_1} \right] = -\frac{q_1}{2} \cdot V$$

ואכן חלה גריעה באנרגיית המערכת.

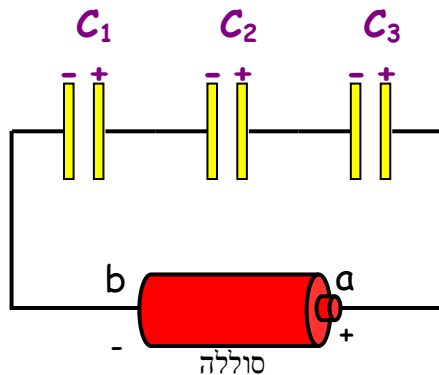
אפיון:

מספר קבלים נקראים "מחוברים בטור" אם מתקיים חיתוך שלושת התנאים הבאים:

א. אין צומת פעיל* בין הקבלים.

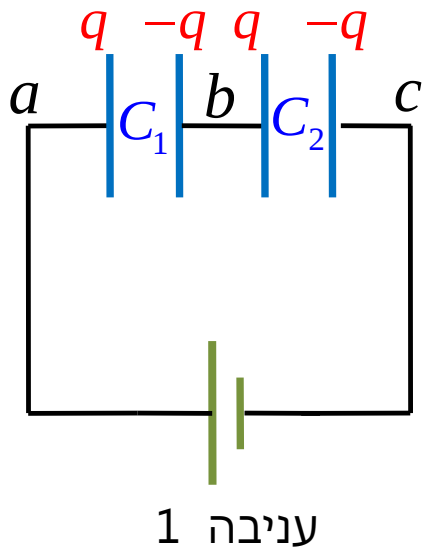
ב. כל הקבלים טעונים באותו מטען Q . זהו גם מטענו של הקבל השקול שלהם.

ג. קטביות הקבלים מסודרת לסירוגין (ראו תרשים):

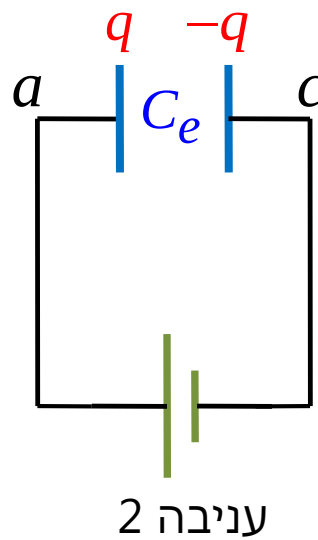


* צומת פעיל הוא צומת בו נמצא קבל טעון או סוללה.

חישוב הקיבול השקול הטורי



$\Rightarrow$



(1) $V_{ac} = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2}$: על פי עניבה (1) ◀

(2) $V_{ac} = \frac{q}{C_e}$: על פי עניבה (2) ◀

(3) $\frac{q}{C_e} = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2}$: מכאן ◀

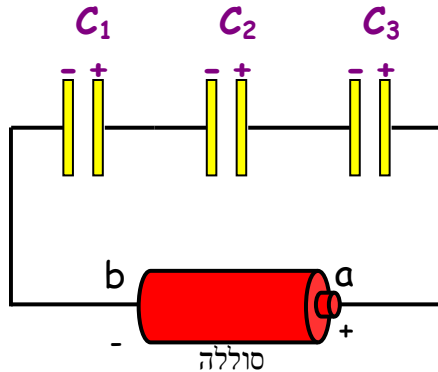
(4) $\frac{1}{C_e} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$

◀ ובהכללה : $\frac{1}{C_e} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots + \frac{1}{C_n}$

◀ ובכיתוב מקוצר :

$$\frac{1}{C_e} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}$$

הערות לגבי חיבור קבלים טורי (1)



בתרשים מתואר מערך קבלים בטור המורכב משלושה קבלים. המערך מחובר למקור מתח (סוללה). החיבור בטור מחייב כי כל הקבלים נטענים באותה כמות מטען וזהו גם המטען שהסוללה מעבירה דרכה מהלוח השמאלי של קבל (1) אל הלוח הימני של קבל (3). כלומר זהו גם מטענו של הקבל השקול.

1. בחיבור קבלים טורי-המתח הכולל על מערך הקבלים שווה לסכום המתחים על כל קבל.
2. המטען החשמלי של מערך הקבלים מוגדר **כמטען העובר דרך הסוללה בתהליך הטעינה**. במקרה של מערך טורי, הסוללה מעבירה דרכה מטען מהלוח הקיצוני השמאלי של קבל (1) אל הלוח הקיצוני הימני של קבל (2), וזאת עקב קוטביות הסוללה.
3. שאר הלוחות נטענים כתוצאה מהשראה חשמלית. דבר זה קורה עקב שדה חשמלי הנוצר בין הלוחות הקיצוניים וגורם קיטוב חשמלי עבור כל שני לוחות מקוצרים (מחוברים בתייל) המהווים יחדיו מוליך נייטרלי אחד.
4. מאחר והמטען על כל קבל שווה, **יחס המתחים הפוך ליחס הקיבולים, כלומר ככל שקיבול הקבל גדול יותר, המתח על הקבל קטן יותר**.

◀ החישוב המצדיק את ההערה הקודמת:
$$V_1 = \frac{q}{C_1} ; V_2 = \frac{q}{C_2} \Rightarrow \boxed{\frac{V_1}{V_2} = \frac{C_2}{C_1}}$$

◀ ניתן לרשום יחס הפוך זה בהכללה, עבור יותר משני קבלים:
$$V_1 : V_2 : V_3 : \dots = \frac{1}{C_1} : \frac{1}{C_2} : \frac{1}{C_3} : \dots$$

הערות לגבי חיבור קבלים טורי- (2)

5. עבור שני קבלים טוריים ניתן לרשום את נוסחת הקיבול השקול בצורה נוחה יותר לחישוב מהיר:

$$C_e = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2}$$

◀ הוכחה :

$$\frac{1}{C_e} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{C_1 + C_2}{C_1 \cdot C_2} \Rightarrow C_e = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2}$$

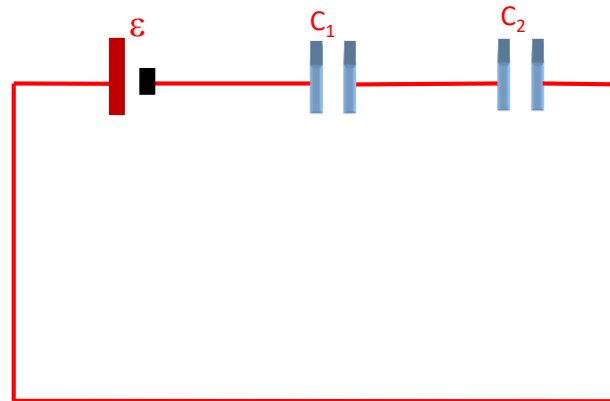
6. עבור n קבלים טוריים שווים (שקיבולו של כל אחד מהם : C-ניתן לרשום את נוסחת הקיבול השקול בצורה נוחה יותר לחישוב מהיר:

$$C_e = \frac{C}{n}$$

◀ הוכחה :

$$\frac{1}{C_e} = \left[\underbrace{\frac{1}{C} + \frac{1}{C} + \frac{1}{C} \dots}_{n \text{ times}} \right] = \frac{n}{C} \Rightarrow C_e = \frac{C}{n}$$

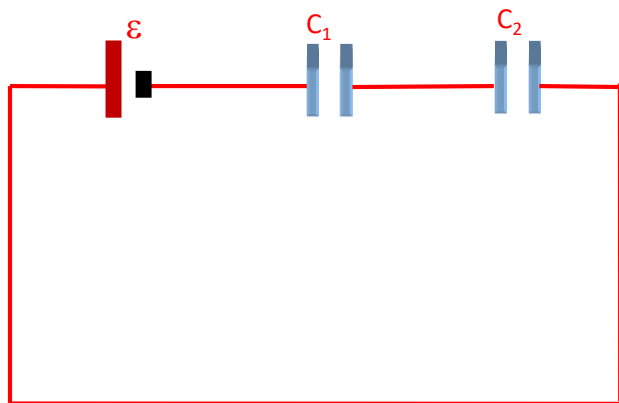
במעגל המתואר בתרשים נתון ש: $C_1=9\mu\text{F}$, $C_2=18\mu\text{F}$. הכא"מ של מקור המתח $\varepsilon=40\text{V}$.



א. חשבו את:

1. המטען על כל קבל.
 2. המתח על כל אחד מהקבלים.
 3. האנרגיה החשמלית האגורה בכל אחד מהקבלים.
- ב. מנתקים את מקור המתח מהמעגל החשמלי. מה יהיה עתה:

1. המתח על כל אחד מהקבלים.
2. המטען על כל קבל.



1. נמצא תחילה את הקיבול השקול:

א.

$$C_{1,2} = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} = \frac{9 \cdot 10^{-6} \cdot 18 \cdot 10^{-6}}{9 \cdot 10^{-6} + 18 \cdot 10^{-6}} = 6 \cdot 10^{-6} F$$

נחשב את המטען הכולל:

$$Q_{1,2} = C_{1,2} \cdot \varepsilon = 6 \cdot 10^{-6} \cdot 40 = 240 \cdot 10^{-6} C$$

2. המתח על פני כל אחד מהקבלים:

$$Q_T = Q_{1,2} = 240 \cdot 10^{-6} C$$

$$V_1 = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{240 \cdot 10^{-6}}{9 \cdot 10^{-6}} = 26.67 V$$

$$V_2 = \frac{Q_2}{C_2} = \frac{240 \cdot 10^{-6}}{18 \cdot 10^{-6}} = 13.33 V$$

3. האנרגיה החשמלית האגורה בכל אחד מהקבלים:

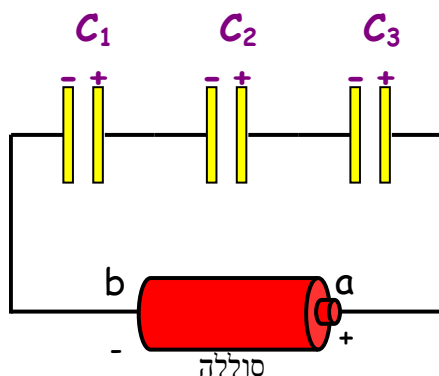
$$U_{P1} = \frac{C_1 \cdot V_1^2}{2} = \frac{9 \cdot 10^{-6} \cdot 26.67^2}{2} = 3200.8 \cdot 10^{-6} J$$

$$U_{P2} = \frac{C_2 \cdot V_2^2}{2} = \frac{18 \cdot 10^{-6} \cdot 13.33^2}{2} = 1638.79 \cdot 10^{-6} J$$

ב. ניתוק המקור לא יגרום לשום שינוי במטעני הקבלים או במתח על פניהם, משום שהמעגל פתוח ואין

אפשרות "ברירת מטען" מהלוחות הקיצוניים.

- א-** הוכיחו שקיבולם השקול של שני קבלים טוריים-קטן מקיבולו של כל אחד מהם לחוד.
- ב-** הכללה-הוכיחו שהוספת קבל טורי C_3 למערך קבלים כלשהו-מקטין את קיבולו השקול של מערך הקבלים.
- ג-** הוכיחו שסך האנרגיות הפוטנציאליות החשמליות של מערך קבלים טוריים טעונים, שווה לאנרגיה הפוטנציאלית החשמלית של הקבל השקול שלהם.
- ד-** הוכיחו את טענה ג' עבור מערך קבלים מקבילי.
- ה-** הכללה-הוכיחו את טענה ג' עבור מערך קבלים כלשהו, כלומר : סך האנרגיות הפוטנציאליות החשמליות של כל הקבלים הטעונים, המחוברים ביניהם בכל צורה שהיא -טור, מקביל או כל צורה אחרת -שווה לאנרגיה הפוטנציאלית החשמלית של הקבל השקול של מערך זה.
- ו-** חשבו את המתח והמטען על פני כל קבל עבור מערך הקבלים הבא:



נתונים:

$$V_{\text{battery}} = V_0 = 22\text{V} ; C_1 = 1\mu\text{F} ; C_2 = 2\mu\text{F} ; C_3 = 3\mu\text{F}$$

א- קיבולם השקול של שני קבלים טוריים : C_1 ו- C_2 נתון בנוסחא :

$$\frac{1}{C_e} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{C_1 + C_2}{C_1 \cdot C_2}$$

$$\Rightarrow C_e = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2}$$

לכן : $C_e < C_1$: $C_e = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} = \left[\frac{C_2}{\underset{\text{less than 1}}{1 + \frac{C_2}{C_1}}} \right] \cdot C_1$ (1)

(2) $C_e < C_2$: $C_e = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} = \left[\frac{C_1}{\underset{\text{less than 1}}{1 + \frac{C_1}{C_2}}} \right] \cdot C_2$

ב- נסמן את הקיבול המקורי של מערך הקבלים (ואין זה משנה איזה סוג של מערך הוא מהווה) ב C_e ואת מערך הקבלים, לאחר הוספת הקבל הטורי C_t , ב C'_e . אזי :

$$C'_e = \frac{C_e \cdot C_t}{C_e + C_t} = \left[\frac{C_t}{\underset{\text{less than 1}}{1 + \frac{C_t}{C_e}}} \right] \cdot C_e < C_e$$

ג- את האנרגיה הפוטנציאלית החשמלית של קבל ניתן לרשום בשלושה אופני רישום :

$$(1) U = \frac{1}{2} QV \quad (2) U = \frac{1}{2} C V^2 \quad (3) U = \frac{Q^2}{2C}$$

מאחר ולכל הקבלים הטוריים יש אותו מטען וזהו גם מטענו של הקבל השקול שלהם-נוסחא (3) תשמש אותנו באופן הנוח ביותר.

סכום האנרגיות של n קבלים טוריים טעונים :

$$\sum_{i=1}^n U_i = \sum_{i=1}^n \frac{Q^2}{2C_i} = \frac{Q^2}{2} \left[\sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i} \right] = \frac{Q^2}{2C_e} = U(C_e)$$

$\frac{1}{C_e}$

ובכך הוכחה הטענה.

ד- קבלים מקביליים מאופיינים בכך שהמתח על כל הקבלים שווה וזהו גם המתח "הנופל" על הקבל השקול. לפיכך נעשה שימוש בנוסחא (2) דלעיל .

סכום האנרגיות של n קבלים מקביליים טעונים :

$$\sum_{i=1}^n U_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} C_i \cdot V^2 = \frac{1}{2} V^2 \left[\sum_{i=1}^n C_i \right] = \frac{1}{2} C_e V^2 = U(C_e)$$

C_e

ובכך הוכחה הטענה.

ה- ההוכחה הכללית של הטענה לשוויון אנרגטי בין סכום האנרגיות של מערך קבלים טעון **כלשהו**, לבין האנרגיה של הקבל השקול שלהם, אינה יכולה להתבסס על נוסחה, שכן אין נוסחה כללית המבטאת קיבול שקול למערך קבלים שאינו מוגדר.
לכן ההכללה תבוסס על ההגדרה הכללית של קיבול שקול:

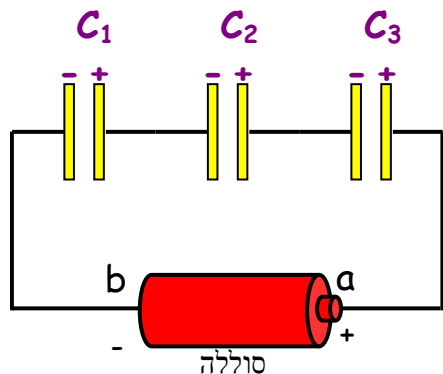
"הקבל השקול של כל מערך קבלים אמור לגרום לסוללה להעביר דרכה את אותה כמות מטען שהיא העבירה דרכה למערך הקבלים המקורי. ולכן גם לבצע את אותה עבודה".

במילים אחרות-הסוללה אמורה "לא להרגיש" בהחלפת מערך הקבלים המקורי בקבל השקול של מערך זה, וזה נכון **לכל מערך קבלים**.
משמע- הסוללה תבצע את אותה עבודה הן כאשר תטען את מערך הקבלים המקורי והן כאשר תטען את הקבל השקול של מערך זה.

בנוסף לכך- בכל מצב של טעינה "מאפס" של מערך קבלים-נפלטת מהמערכת אנרגיה (חום/קרינה) בשיעור של 50% מעבודת הסוללה.

לכן-אנרגיית מערך הקבלים תהיה בשיעור של **מחצית מעבודת הסוללה** (שהיא כאמור לעיל שווה בשני המקרים).

ובכך הוכחה ההכללה.



נתונים : $V_{\text{battery}} = V_0 = 22\text{V}$; $C_1 = 1_{\mu\text{F}}$; $C_2 = 2_{\mu\text{F}}$; $C_3 = 3_{\mu\text{F}}$

שלב 1-חישוב הקבל השקול:

$$\frac{1}{C_e} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \left(\frac{11}{6}\right)_{1/\mu\text{F}} \Rightarrow C_e = \left(\frac{6}{11}\right)_{\mu\text{F}}$$

שלב 2-חישוב מטענו של הקבל השקול:

$$Q_e = C_e \cdot V_0 = \left(\frac{6}{11}\right)_{(1/\mu\text{F})} \cdot 22_{(\text{V})} = 12_{(\mu\text{C})}$$

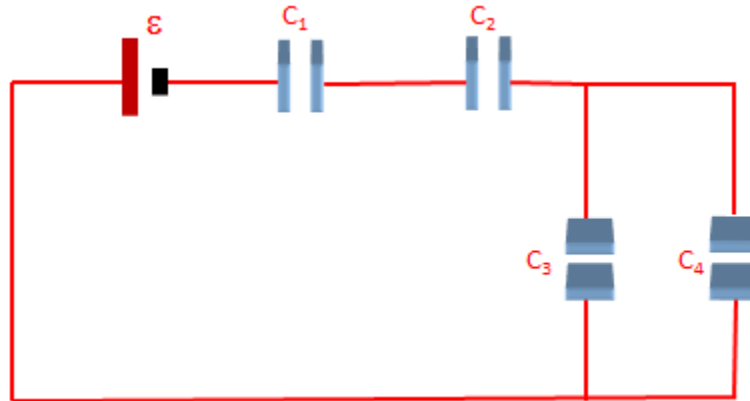
זהו גם מטענו של כל קבל לחוד. כלומר : $Q_e = Q_1 = Q_2 = Q_3 = 12_{(\mu\text{C})}$

שלב 3-חישוב המתח על פני כל קבל :

$$V_1 = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{12_{(\mu\text{C})}}{1_{(\mu\text{F})}} = 12_{(\text{V})} \quad V_2 = \frac{Q_2}{C_2} = \frac{12_{(\mu\text{C})}}{2_{(\mu\text{F})}} = 6_{(\text{V})} \quad V_3 = \frac{Q_3}{C_3} = \frac{12_{(\mu\text{C})}}{3_{(\mu\text{F})}} = 4_{(\text{V})}$$

דוגמא (5)-מערך קבלים משולב - טורי ומקבילי

במעגל המתואר בתרשים נתון ש: $C_4=6\mu F$, $C_3=8\mu F$, $C_2=18\mu F$, $C_1=9\mu F$.
הכא"מ של מקור המתח $\varepsilon=40V$.

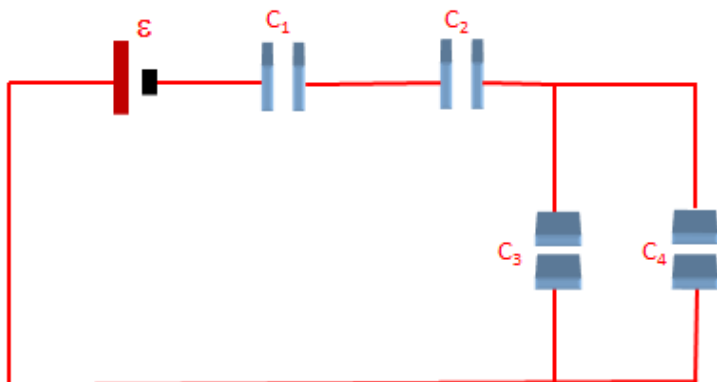


א. חשבו את:

1. המטען על כל קבל.
 2. המתח על כל אחד מהקבלים.
 3. האנרגיה החשמלית האגורה בכל אחד מהקבלים.
- ב. מנתקים את מקור המתח מהמעגל החשמלי. מה יהיה עתה:

1. המתח על כל אחד מהקבלים.
2. המטען על כל קבל.

א. נחשב תחילה את הקיבול השקול של המעגל:



$$C_{1,2} = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} = \frac{9 \cdot 10^{-6} \cdot 18 \cdot 10^{-6}}{9 \cdot 10^{-6} + 18 \cdot 10^{-6}} = 6 \cdot 10^{-6} F$$

$$C_{3,4} = C_3 + C_4 = 8 \cdot 10^{-6} + 6 \cdot 10^{-6} = 14 \cdot 10^{-6} F$$

$$C_{1,2,3,4} = \frac{C_{1,2} \cdot C_{3,4}}{C_{1,2} + C_{3,4}} = \frac{6 \cdot 10^{-6} \cdot 14 \cdot 10^{-6}}{6 \cdot 10^{-6} + 14 \cdot 10^{-6}} = 4.2 \cdot 10^{-6} F$$

$$Q_T = C_T \cdot \varepsilon = 4.2 \cdot 10^{-6} \cdot 40 = 168 \cdot 10^{-6} C$$

$$Q_T = Q_{1,2} = Q_1 = Q_2 = 168 \cdot 10^{-6} C$$

$$V_1 = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{168 \cdot 10^{-6}}{9 \cdot 10^{-6}} = 18.67 V$$

$$V_2 = \frac{Q_2}{C_2} = \frac{168 \cdot 10^{-6}}{18 \cdot 10^{-6}} = 9.33 V$$

$$U_{P1} = \frac{C_1 \cdot V_1^2}{2} = \frac{9 \cdot 10^{-6} \cdot 18.67^2}{2} = 1568.65 \cdot 10^{-6} J$$

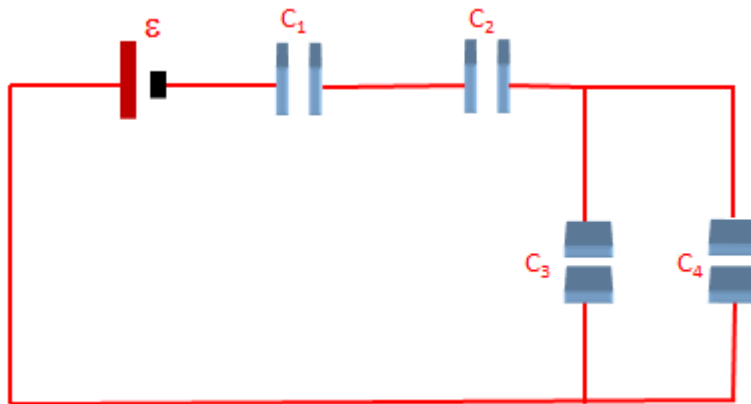
$$U_{P2} = \frac{C_2 \cdot V_2^2}{2} = \frac{18 \cdot 10^{-6} \cdot 9.33^2}{2} = 783.94 \cdot 10^{-6} J$$

המטען הכולל:

קבלים 1 ו-2 מחוברים בטור לכן:

המתח על פני קבל 1 וקבל 2:

האנרגיה האגורה בקבל 1 ובקבל 2:



א.

$$Q_{3,4} = Q_T = 168 \cdot 10^{-6} C$$

$$V_{3,4} = \frac{Q_{3,4}}{C_{3,4}} = \frac{168 \cdot 10^{-6}}{14 \cdot 10^{-6}} = 12V$$

$$V_3 = V_4 = 12V$$

$$Q_3 = C_3 \cdot V_3 = 8 \cdot 10^{-6} \cdot 12 = 96 \cdot 10^{-6} C$$

$$Q_4 = C_4 \cdot V_4 = 6 \cdot 10^{-6} \cdot 12 = 72 \cdot 10^{-6} C$$

או בדרך אחרת:

$$V_{3,4} = \varepsilon - V_1 - V_2 = 40 - 18.67 - 9.33 = 12V$$

$$Q_3 = C_3 \cdot V_3 = 8 \cdot 10^{-6} \cdot 12 = 96 \cdot 10^{-6} C$$

$$Q_4 = C_4 \cdot V_4 = 6 \cdot 10^{-6} \cdot 12 = 72 \cdot 10^{-6} C$$

$$U_{P1} = \frac{C_1 \cdot V_1^2}{2} = \frac{9 \cdot 10^{-6} \cdot 26.67^2}{2} =$$

$$U_{P2} = \frac{C_2 \cdot V_2^2}{2} = \frac{18 \cdot 10^{-6} \cdot 13.33^2}{2} =$$

האנרגיה האגורה בקבל 3 ובקבל 4:

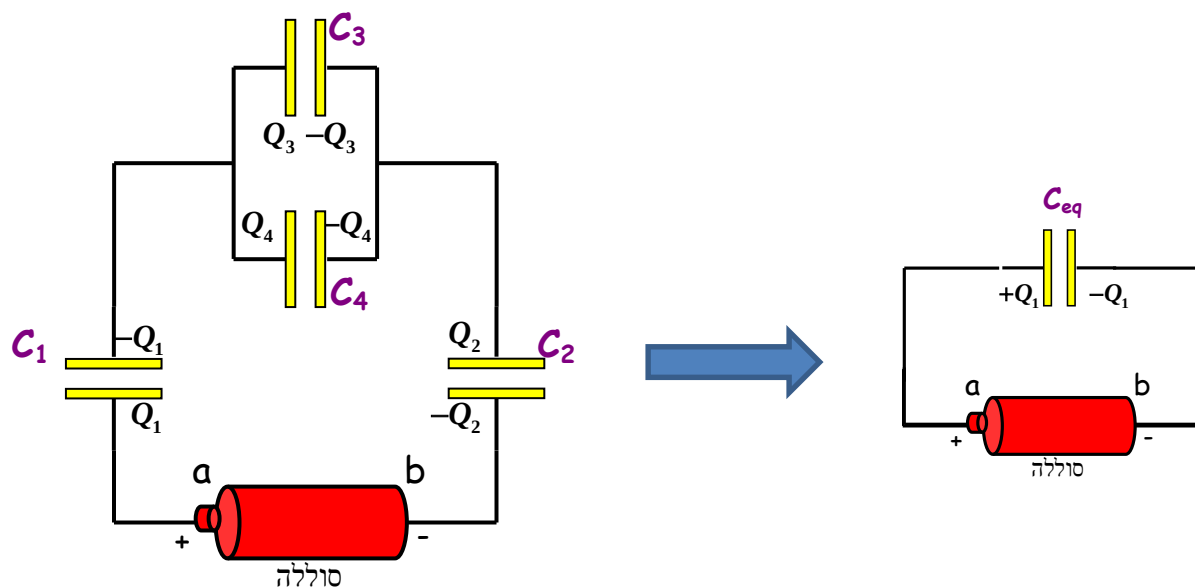
ב. כאשר מנתקים את מקור המתח מהמעגל החשמלי, המטען הכולל אינו משתנה, והקיבול השקול

אינו משתנה לכן המתח על כל קבל והמטען על כל קבל לא ישתנה.

◀ מערך קבלים כללי

הקבל השקול למערך קבלים זה הוא קבל יחיד אשר יגרום לסוללה להעביר דרכה, ממוליך A למוליך B, את אותה כמות מטען שעברה דרכה כאשר היא היתה מחוברת למערך הקבלים המקורי.

כלומר- הסוללה לא תרגיש בהבדל שתי התצורות (קונפיגורציות).

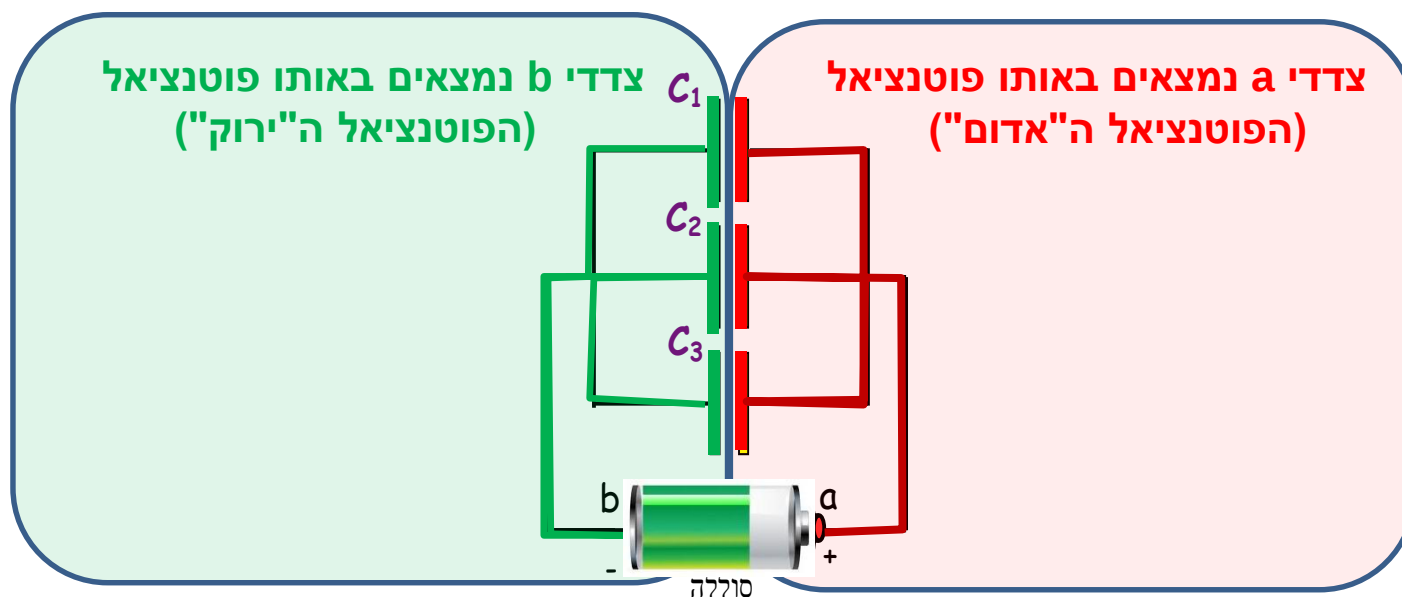


◀ מערך קבלים מקבילי

אפיון :

מספר קבלים יקראו "מחוברים במקביל" אם מתקיים חיתוך שני התנאים הבאים:

- I**
- צדדי a של כל הקבלים הם שווי פוטנציאל.
 - צדדי b של כל הקבלים הם שווי פוטנציאל.



מאחר ומתחי הקבלים שווים זה לזה-יחס מטעני הקבלים שווה ליחס קיבוליהם (קיבול גדול-מטען גדול)

$$q_1 : q_2 : q_3 \dots = C_1 : C_2 : C_3 \dots$$

◀ נוסחת השקול המקבילי :

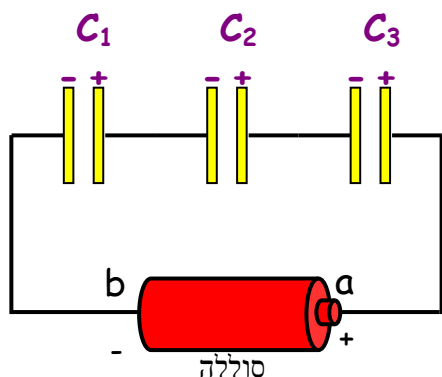
$$C_e = \sum_{i=1}^n C_i$$

◀ מערך קבלים טורי

◀ אפיון :

מספר קבלים נקראים "מחוברים בטור" אם מתקיים חיתוך שלושת התנאים הבאים:

- א. אין צומת פעיל* בין הקבלים.
- ב. כל הקבלים טעונים באותו מטען Q . זהו גם מטענו של הקבל השקול שלהם.
- ג. קטביות הקבלים מסודרת לסירוגין (ראו תרשים) :



* צומת פעיל הוא צומת בו נמצא קבל טעון או סוללה.

◀ נוסחת הקבל השקול הטורי :

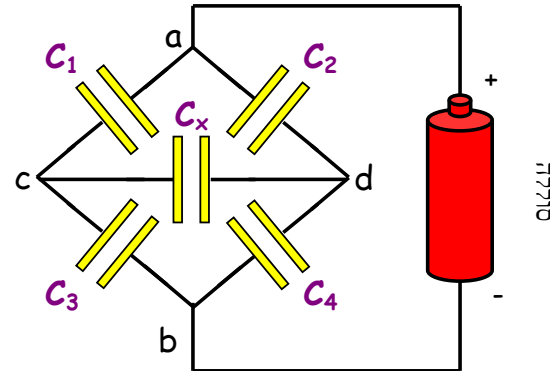
$$\frac{1}{C_e} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}$$

◀ בחיבור קבלים טורי, יחס המתחים הפוך ליחס הקיבולים (כלומר : קיבול קטן-מתח גבוה)

$$V_1 : V_2 : V_3 : \dots = \frac{1}{C_1} : \frac{1}{C_2} : \frac{1}{C_3} : \dots$$

גשר ויטסטון של קבלים

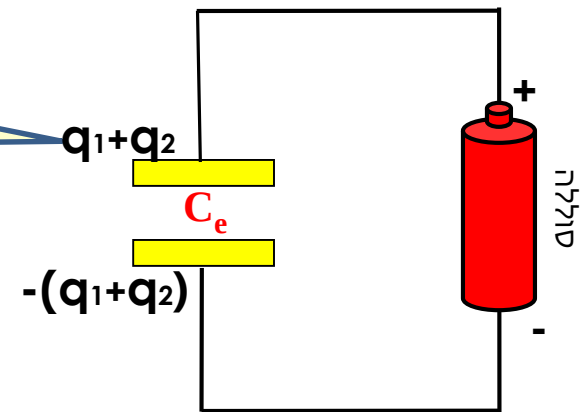
מעריך בן 5 קבלים שאף אחד מהם אינו מחובר – לא בטור ולא במקביל לאף קבל אחר:



מבנה סטנדרטי:

כדי לחשב את קיבולו של הקבל השקול C_e עלינו לרשום 3 משוואות עניבה ו 3 משוואות צומת וכן לרשום את משוואת העניבה עבור הקבל השקול (לא נרשום משוואות אלו בשל הסבך הרב הכרוך בפתרון):

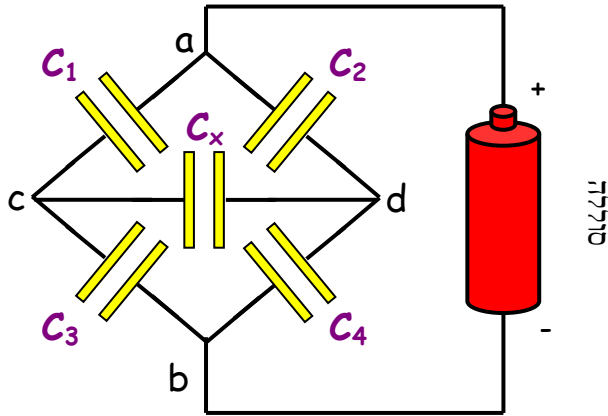
חשוב לשים לב כי מטענו של הקבל השקול חייב להיות $q_1 + q_2$ שכן זהו המטען שהסוללה העבירה משני הלוחות התחתונים אל שני הלוחות העליונים כאשר היא היתה מחוברת למעריך הקבלים המקורי



הערה: ישנן שיטות מתקדמות יותר לחישוב קיבולו של הקבל השקול. למשל שיטת כוכב/משולש. הן חורגות ממסגרת הלימוד התיכוני. בשקופית הבאה נדון במקרה פרטי-גשר ויטסטון מאזן.

◀ **מקרה פרטי-גשר ויטסטון מאזן של קבלים :**

מקרה פרטי של גשר ויטסטון הנו המקרה בו הפוטנציאל של נקודה c שווה לפוטנציאל של נקודה d .
כלומר על הקבל C_x אין מתח, קרי אין עליו מטען. במצב זה נקרא למערך גשר ויטסטון **מאזן**.



◀ **התנאי לכך שהגשר יהיה מאזן, כלומר על C_x לא יצטבר מטען:**

$$V_c = V_d \Rightarrow \begin{cases} (1) V_{ac} = V_{ad} \\ (2) V_{cb} = V_{db} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1) \frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_2}{C_2} \\ (2) \frac{Q_3}{C_3} = \frac{Q_4}{C_4} \end{cases} \xrightarrow{Q_1=Q_3, Q_2=Q_4} \begin{cases} (1) \frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_2}{C_2} \\ (2) \frac{Q_1}{C_3} = \frac{Q_2}{C_4} \end{cases} \xrightarrow{(2):(1)} \boxed{\frac{C_1}{C_2} = \frac{C_3}{C_4}}$$

◀ **במצב זה של גשר מאזן המערך הופך להיות פשוט הרבה יותר, הקבלים C_1, C_3 מחוברים בטור וכך גם הקבלים C_2, C_4 , כאשר זוגות אלו מחוברים במקביל.**

◀ **אם נסמן חיבור בטור באמצעות הסימן * וחיבור במקביל באמצעות הסימן P , אזי נוכל לרשום :**

$$C_e = (C_1 * C_3)P(C_2 * C_4) \text{ or : } (C_1 PC_2) * (C_2 PC_4)$$